UNIVERSIDAD LOS ANGELES DE CHIMBOTE

UNIVERSIDAD "LOS ÁNGELES" DE CHIMBOTE

SISTEMA DE EDUCACIÓN ABIERTA

- **DOCENTE** : **Julio Lezama Vásquez.**
- **E-MAIL** : **fervas@yahoo.es**
- **TELÉFONO** : **044- 9906504**
- **ATENCIÓN AL ALUMNO** : **sea@uladech.edu.pe**
- **TELEFAX** : **043-327846**

MATEMÁTICA FINANCIERA II

ESCUELAS PROFESIONALES DE CONTABILIDAD
Y ADMINISTRACIÓN
CICLO IV

Modelo Pedagógico de la Guía:
Mg. Ruth Santiváñez Vivanco.

Edición:
© Lic. Manuel Antonio Cardoza Sernaqué.

Universidad "Los Ángeles" de Chimbote.
Leoncio Prado 453.
Chimbote (Perú) **www.uladech.edu.pe**
editorial@hotmail.com

C O N T E N I D O

CAPÍTULO I: INTERÉS COMPUESTO

1.1 Función del tiempo…………………………………………………… 9
1.2 La escala de tiempo…………………………………………………. 9
1.3 Valor del dinero en el tiempo……………………………………….. 10
1.4 Periodo de capitalización……………………………………………10
1.5 Valor futuro de un capital……………………………………………10
1.6 Capitalización………………………………………………………. 10
1.7 Interés compuesto…………………………………………………… 11
1.8 Cálculo del monto…………………………………………………… 11
1.9 Deducción de fórmulas………………………………………………11
1.10 Factor simple de capitalización………………………………………12
1.11 El monto en función de la tasa nominal………………………………13
1.12 El monto en periodos fraccionarios…………………………………. 15
1.13 Capitalización calendaria……………………………………………. 15
1.14 Monto con principal constante y tasa efectiva variable…………………16
1.15 Monto con capital y tasa efectiva variable……………………………16
1.16 Cálculo del interés compuesto………………………………………..17
1.17 Problemas propuestos…………………………………………………18

CAPÍTULO II: VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO

2.1 Cálculo del valor actual………………………………………………….21
2.2 Factor simple de actualización…………………………………………..22
2.3 Valor actual en función de la tasa nominal……………………………22
2.4 Tasa de interés…………………………………………………………23
2.5 Tasa nominal…………………………………………………………. 23
2.6 Tasa efectiva…………………………………………………………. 26
2.7 Conversión de tasas………………………………………………….. 29
2.8 Conversión de una tasa efectiva en otra efectiva de diferente periodo… .29
2.9 Conversión de una tasa efectiva en una tasa nominal…………………... 30
2.10 Tasa de inflación………………………………………………………32
2.11 Cálculo de la tasa real…………………………………………………33
2.12 Cálculo del tiempo…………………………………………………….36
2.13 Listado de fórmulas……………………………………………………37
2.14 Problemas propuestos…………………………………………………38

CAPÍTULO III: DESCUENTO COMPUESTO Y ECUACIONES DE VALOR

3.1 Descuento racional o verdadero……………………………………….. 41
3.2 Cálculo del descuento………………………………………………. 41
3.3 Cálculo del valor nominal y valor efectivo…………………………..43
3.4 Descuento bancario compuesto………………………………………44
3.5 Ecuaciones de valor…………………………………………………. 47
3.6 Ecuaciones de valor a interés compuesto……………………………… 47
3.7 Valor equivalente……………………………………………………… 48
3.8 Vencimiento medio de obligaciones……………………………….. 48
3.9 Listado de fórmulas…………………………………………………… 50
3.10 Problemas propuestos………………………………………………… 50

CAPÍTULO IV: ANUALIDADES

4.1 Clasificación de las anualidades………………………………………… 53
4.2 Monto de una anualidad simple ordinaria……………………………… 54
4.3 Valor presente de una anualidad………………………………………. 56
4.4 Cálculo del valor de las rentas en una anualidad……………………… 58
4.4.1 Renta ordinaria en función del monto……………………………… 58
4.4.2 Renta ordinaria en función del valor actual…………………… 59
4.5 Cálculo del tiempo en una anualidad………………………………. 61
4.6 Cálculo de la tasa de interés de una anualidad……………………… 63
4.7 Listado de fórmulas………………………………………………….. 66
4.8 Problemas propuestos………………………………………………… 66

CAPÍTULO V: ANUALIDADES ANTICIPADAS

5.1 Monto de una anualidad simple anticipada………………………….. 69
5.2 Valor actual de una anualidad anticipada……………………………. 71
5.3 Valor de la renta anticipada………………………………………. . 73
5.3.1 Renta anticipada en función del monto………………………. 75
5.3.2 Renta anticipada en función del valor actual…………………. 77
5.4 Cálculo del tiempo en una anualidad anticipada……………………… 77
5.4.1 Cálculo del tiempo en función del monto……………………. 78
5.4.2 Cálculo del tiempo en función del valor actual……………… 79
5.5 Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada………….. 81
5.6 Listado de fórmulas………………………………………………… 81
5.7 Problemas propuestos……………………………………………. 81

CAPÍTULO VI: ANUALIDADES DIFERIDAS Y RENTAS PERPETUAS

6.1 Valor del monto de una anualidad diferida……………………… 84
6.1.1 Monto de una anualidad vencida simple diferida………… 84
6.1.2 Monto de una anualidad simple anticipada diferida……… 85
6.2 Valor actual de una anualidad diferida…………………………… 85
6.3 Valor de la renta de una anualidad diferida……………………… 87
6.3.1 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del monto………………………………………………….. 87
6.3.2 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del monto………………………………………………….. 87
6.3.3 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del valor Actual…………………………………………………… 88
6.3.4 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del valor actual………………………………………………… 89
6.3.5 Cálculo de n y t en una anualidad simple diferida…………… 90
6.4 Rentas perpetuas o vitalicias……………………………………… 91
6.4.1 Valor actual de una renta perpetua ordinaria……………….. 91
6.4.2 Valor actual de una renta perpetua anticipada……………… 94
6.5 Valor de la renta perpetua……………………………………..… 95
6.5.1 Valor de la renta perpetua ordinaria………………………… 95
6.5.2 Valor de la renta perpetua anticipada……………………….. 96
6.6 Listado de fórmulas………………………………………………... 97
6.7 Problemas propuestos……………………………………………..… 98

CAPÍTULO VII: ANUALIDADES GENERALES

7.1 Monto con varios periodos de capitalización por periodo de tiempo… 99
7.2 Monto con varios periodos de pago por período de capitalización……101
7.3 Valor presente de una anualidad general………………………………102
7.4 Valor de las renta de una anualidad general ordinaria………………. 103
7.5 Valor de la renta de una anualidad general anticipada……………… 105
7.6 Problemas propuestos……………………………………………… 106

CAPÍTULO VIII: AMORTIZACIÓN, DEPRECIACIÓN Y AGOTAMIENTO

8.1 Amortizaciones……………………………………………………109
8.1.1 Amortizaciones vencidas a cuota constante…………………109
8.1.2 Amortizaciones anticipadas a cuota constante……………… 111
8.1.3 Amortizaciones vencidas a cuota constante, cuando el

préstamo se desembolsa en partes…………………………. 112
8.2 Depreciaciones…………………………………………………….. 113
8.3 Métodos de cálculo de las depreciaciones………………………… 114
8.3.1 Depreciación a cuota constante…………………………… 114
8.3.2 Depreciación a cuota decreciente…………………………… 120
8.3.3 Depreciación a cuota creciente……………………………… 123
8.4 Agotamiento……………………………………………………… 124
8.4.1 Método del factor o costo de agotamiento…………………. 125
8.4.2 Método del fondo de amortización………………………… 126
8.5 Problemas propuestos……………………………………………… 127

CAPÍTULO IX: EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN

9.1 Evaluación económica……………………………………………… 129
9.1.1 Valor actual neto…………………………………………… 129
9.1.2 Tasa interna de retorno…………………………………… 130
9.1.3 Relación beneficio costo…………………………………… 132
9.1.4 Periodo de recuperación de capital………………………… 133

.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas financieras, proporcionan herramientas que permite evaluar las diferentes alternativas de financiamiento empresarial; de manera que se constituyen en instrumentos técnicos, que orientan a los ejecutivos en la toma de decisiones, para asignar recursos monetarios a las operaciones más rentables y que mejor convengan a las organizaciones.

Como cualquier otra actividad científica las matemáticas financieras evolucionan, utilizan nuevas formas y, a medida que se amplía el campo de sus aplicaciones, se profundizan los conceptos. Por tanto en este curso estudiamos los fundamentos teóricos de las matemáticas financieras, la lógica de sus diferentes métodos y las herramientas que nos permiten dar solución a la infinidad de problemas que en este campo se presentan.

Uno de los principales objetivos del trabajo, es que el estudiante adquiera destrezas en la interpretación y manejo de los conceptos y las fórmulas de acuerdo a cada tema, a fin de afianzar sus conocimientos en la materia, los mismos que le permitirán una aplicación exitosa en el ejercicio profesional.

Con el propósito de dinamizar y hacer más comprensible el estudio de la asignatura de Matemáticas Financieras, diseñamos el presente texto, en el que el lector encontrará las respectivas instrucciones para su eficiente manejo y las estrategias de estudio de todos y cada uno de los temas, permitiendo el desarrollo de un aprendizaje de calidad.

Concientes de que una de las características mas relevantes del mundo globalizado, son los cambios vertiginoso en todos sus ámbitos, como en el tecnológico, económico y financiero, induciendo una evolución permanente de estas áreas del conocimiento y en particular de las matemáticas financieras que cambian al compás de los escenarios en los cuales actúan.

Los capítulos se han estructurado desarrollando un nivel de complejidad ascendente, de modo que la comprensión de uno facilita la comprensión del siguiente, cada capítulo desarrolla la parte teórica, ejemplos y problemas de aplicación correspondientemente resueltos.

El capítulo 1. Presenta los conceptos básicos de las matemáticas financieras, deducción de las fórmulas correspondientes al monto y al interés compuesto, dando solución a problemas de casos tipos.

El capitulo 2. En este capítulo se toca lo referente al valor actual a interés compuesto, se estudia además la tasa de interés en sus diferentes modalidades, finalizando con el cálculo del tiempo

En el capítulo 3 se estudia lo referente al descuento, tanto el racional como el bancario y las ecuaciones de valor a interés compuesto

En los capítulos 4, 5, 6 y 7 se estudian las anualidades en sus diferentes formas, como las anualidades ordinarias, anticipadas, diferidas, perpetuas o vitalicias y las anualidades generales.

El capítulo 8, trata respecto a las amortizaciones de deudas, depreciación de activos fijos y agotamiento de recursos no renovables.

Finalmente, el capítulo 9 desarrolla los temas respecto a la evaluación de alternativas de inversión, analizando los principales indicadores de evaluación como el valor actual neto, la tasa interna de retorno, el período de recuperación de capital y la relación beneficio costo.

C A P Í T U L O I

1. INTERÉS COMPUESTO

Las matemáticas financieras como cualquier otra actividad científica utilizan categorías e instrumentos técnicos que ameritan su definición teórica para una mejor comprensión de sus contenidos.

En consecuencia, iniciamos el estudio de nuestra materia con el análisis de los conceptos básicos referentes a las categorías utilizadas en el cálculo financiero. Es evidente que algunos de ellos, ya nos son familiares por haberse tocado en Matemática Financiera I, pero es necesario mantenerlo vigente para su aplicación correspondiente en la presente asignatura.

1.1 Función del Tiempo

El crecimiento natural es una variación proporcional de la cantidad presente en cualquier orden de cosas en función del tiempo, tal es el caso de los vegetales, animales etc. que crecen en función continua al tiempo, situación que también se presenta en la capitalización a interés compuesto.

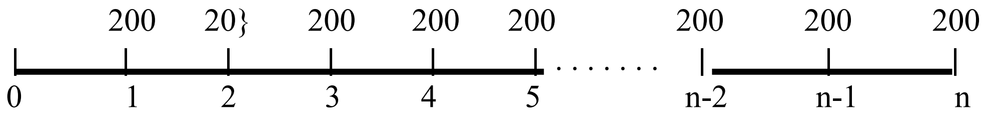
1.2 La Escala de Tiempo

La escala de tiempo es indispensable para visualizar el flujo previsto de efectivo resultante de una inversión propuesta.

La escala de tiempo muestra periodos de cálculo del interés, como pueden ser: meses, trimestres, semestres, años o cualquier otro período de tiempo. Por ejemplo si el interés se calcula y se capitaliza trimestralmente, por un espacio de 10 años, la escala de tiempo mostrará 40 periodos y si se capitaliza semestralmente la escala mostrará 20 períodos.

Gráficamente la escala de tiempo, lo ilustramos en la figura siguiente:

Fig. 1.1



La Fig. 1.1 representa una serie uniforme de desembolsos anuales que tienen lugar al final de cada año durante un periodo de n años.

1.3 Valor del Dinero en el Tiempo

El concepto del valor del dinero en el tiempo, se sustenta en el hecho de que el dinero disponible ahora, vale más que la expectativa de la misma cantidad en un período futuro.

Debido a que una unidad monetaria ahora se puede colocar en una alternativa que permita un rendimiento en el futuro, convirtiéndose en una cantidad mayor que la actual. De manera que no es lo mismo recibir una unidad monetaria ahora, a recibir la misma cantidad dentro de un mes.

El valor del dinero en el tiempo es diferente, por efecto de la tasa de interés y la tasa inflacionaria; la tasa de interés permite medir el valor económico del dinero y la tasa inflacionaria su capacidad adquisitiva. Por lo tanto un sol de hoy no es el mismo que el de ayer o el de mañana.

La explicación del valor del dinero en el tiempo, nos llevaría a afirmar que no nos atreveríamos a otorgar dinero en calidad de préstamo, sin exigir como pago una cantidad adicional que compense la pérdida de la capacidad adquisitiva o conservar su valor equivalente en el tiempo.

La tasa exigible por el préstamo es la tasa de interés; en consecuencia, el tiempo y la tasa de interés son factores esenciales que nos permiten conocer el valor cronológico del dinero. Ahondando un poquito más, el interés puede definirse ya como un costo o como una ganancia. Será un costo, cuando se pide fondos prestados a terceros y por su utilización convenimos pagar una cierta cantidad de dinero; se define como ganancia cuando el préstamo se utiliza en la compra de materiales y equipos con la finalidad de desarrollar una actividad económica que nos permitan generar ganancias

1.4 Periodo de Capitalización

Es el intervalo de tiempo convenido, para capitalizar los intereses formando un valor futuro o monto.

1.5 Valor Futuro de un Capital

Es el valor final o monto acumulado, después de transcurridas sucesivas capitalizaciones durante el horizonte temporal

1.6 Capitalización

Capitalizar significa sumar el interés al capital al final de cada período, formando un nuevo capital mayor al anterior, sobre el cual se calculará el interés del siguiente período y así sucesivamente hasta el último, de manera que se capitalizarán, tantas veces como el número de períodos permanezca el capital invertido.

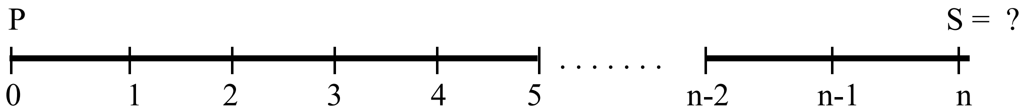
1.7 Interés Compuesto

Es el proceso mediante el cual el interés generado por un capital calculado al final de cada período no se retiran sino que se suman al capital (se capitalizan) para formar un nuevo capital y sobre la base de este, calcular el interés del siguiente período y así sucesivamente, entonces dicha operación financiera toma el nombre de interés compuesto. Cuando los intereses se pagan periódicamente, no puede haber interés compuesto, puesto que el capital se mantiene constante

1.8 Cálculo del Monto

En cualquier inversión o colocación de dinero se espera recibir, el capital más sus intereses. Se compran bonos, acciones u otros títulos, para recibir después de un determinado periodo de tiempo una cantidad mayor. En este caso el monto es igual a la suma del capital más el interés compuesto, calculado a una tasa de interés (i) en (n) periodos de tiempo; operación que lo ilustramos en la escala de tiempo:

Fig. 1.2



1.9 Deducción de la fórmula del Monto

Para el efecto utilizaremos la simbología siguiente:

S = Monto o cantidad de dinero en una fecha futura, constituido por la suma del capital más el interés.
P = Capital actual o valor presente del dinero por el cual se paga intereses. En la escala de tiempo se ubica en el punto cero, o cualquier otro punto en que se inicia el cómputo del tiempo.
i = Tasa de interés de un capital o tasa de rendimiento de una inversión.
n = Número de periodos en los que un capital se encuentra colocado.
m = Frecuencia de capitalización
I = Importe del interés

De conformidad con la definición del valor futuro de un capital, como la suma del capital más el interés, al que se le denomina también monto, deducimos la fórmula mediante el siguiente razonamiento:

Si un capital P, al final del primer período se ha convertido en

$$P + Pi$$

Factorizando dicha expresión se habrá convertido en:

$$P(1+i).$$

al finalizar el segundo periodo, este nuevo capital se habrá convertido en

$$P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2\ ;$$

y al finalizar el tercer periodo en

$$P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3.$$

esto implica que al final de n periodos, el capital se habrá convertido en :

$$P(1+i)^n$$

En dicha expresión se encuentra sumado el capital con los intereses obtenidos en n períodos.

Luego la fórmula del monto será:

$$S = P(1+i)^n$$

La fórmula permite calcular el monto en una cuenta as interés compuesto, cuando el capital y la tasa de interés efectiva son constantes, no se producen incrementos ni reducciones del capital, ni se realizan retiros de intereses durante el horizonte temporal. En esta fórmula y las demás referentes al cálculo financiero, **i** y **n** deben estar expresados en períodos de tiempo de la misma duración; es decir si **i** es anual **n** es número de años, si **i** es trimestral **n** será numero de trimestres y así sucesivamente para cualquier otro periodo de tiempo.

1.10 Factor Simple de Capitalización

La expresión $\mathbf{(1+i)^n}$ que multiplica al capital se llama Factor Simple de Capitalización, simbólicamente lo podemos expresar por **FSC**. Por lo tanto la formula podría también expresarse como:

$$S = P_{i-n}.FSC$$

y se lee el monto es igual al producto del capital por el factor simple de capitalización a una tasa de interés **i** en **n** períodos de tiempo.

El FSC es el monto a interés compuesto, generado por un capital de una unidad monetaria, durante **n** períodos de tiempo y a una tasa de interés **i** por período. Dicho factor tiene por función llevar al futuro cualquier cantidad presente o traer al presente cualquier cantidad del pasado.

Ejemplo 1.1 Se deposita en un banco de Ahorros S/.5,000 a interés compuesto a la tasa efectiva del 20% anual. ¿A cuánto ascenderá el monto al cabo de 4 años?

$$S = P(1+i)^n$$

$$S = 5{,}000(1+0.20)^4$$

$$S = 5{,}000(1.20)^4$$

$$S = 5{,}000(2.0736)$$

$$S = 10{,}368$$

Como la tasa efectiva esta dado anualmente, significa que el cálculo de los intereses y las correspondientes capitalizaciones se dan anualmente. Es decir al final de cada año.

1.11 El Monto en Función de la Tasa Nominal

Para solucionar problemas de carácter financiero con aplicación de la tasa nominal que puede ser anual TNA, tasa nominal semestral TNS o en cualquier otro periodo de tiempo, con diferentes periodos de capitalización pudiendo ser mayor o menor al periodo dado para la tasa nominal, es necesario determinar la tasa proporcional dividiendo o multiplicando según el caso..

Por ejemplo, pueden darse los casos:

Una tasa nominal anual TNA con capitalización mensual; una tasa nominal trimestral TNT con capitalización mensual o también la capitalización puede estar dado en un periodo mayor al de la tasa nominal, como el siguiente: Una tasa nominal mensual TNM con capitalización trimestral.

En estos casos la fórmula anterior se ve afectado por la frecuencia de capitalización (**m**); para el efecto es necesario convertir la tasa nominal **j** capitalizable **m** veces en una tasa efectiva **i** del período capitalizable.

Cuando la frecuencia de capitalización se efectúa en un período menor al establecido para la tasa nominal, la tasa efectiva del período capitalizable se obtiene dividiendo la tasa nominal por la frecuencia de capitalización.

$$i = \frac{j}{m}$$

De manera que la fórmula del monto estaría dado por
:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n}$$

Cuando el período de la frecuencia de capitalización esta dado en un período mayor al de la tasa nominal, es necesario adecuar la tasa multiplicándolo correspondientemente. Por ejemplo, si se tiene una tasa nominal **j** mensual con capitalización semestral, es necesario multiplicar a la tasa nominal **j** por **seis,** por que en un semestre hay **seis** meses.

Es decir la tasa **i** y el número de períodos **n** deben estar referidos a la misma unidad de tiempo, efectuando de ser necesario las conversiones apropiadas cuando dichas variables corresponden a diferentes períodos de tiempo.

Ejemplo 1.2 Un comerciante coloca la cantidad de S/. 10,000 al 26% anual con capitalización trimestral durante 5 años y desea saber de cuanto dispondrá al final del período.

$$S = 10{,}000\left(1 + \frac{0.26}{4}\right)^{20}$$

$$S = 10{,}000\left(1 + 0.065\right)^{20}$$

$$S = 10{,}000\left(1.065\right)^{20}$$

$$S = 35{,}236.45$$

En este caso si la frecuencia de capitalización es trimestral el valor de **m** se obtiene respondiendo a la pregunta. ¿Cuántos trimestres tiene el año?.

Al dividir a la tasa y multiplicar al número de períodos por la frecuencia de capitalización, se ha convertido ambas variables en la unidad de tiempo trimestral.

Ejemplo 1.3 Un banco paga por depósitos en ahorro una tasa nominal mensual del 2% con capitalización trimestral. ¿Cual será el monto acumulado si el capital es de S/.2,000, colocado durante 9 meses?.

Para obtener la tasa efectiva por período de capitalización, multiplicamos la tasa nominal mensual 0.02 por 3 meses que trae el trimestre, de manera que al término del primer período de capitalización, la tasa de interés efectiva será de 0.06 y luego nos preguntamos: ¿Cuantos trimestres hay en 9 meses?, la respuesta es 3, remplazando los datos en la fórmula obtenemos:.

$$S = 2{,}000\ (1 + .06)^{3}$$

$$S = 2{,}382.03$$

1.12 El Monto en Periodos Fraccionarios

Analizando los diferentes casos las operaciones financieras, a menudo no coinciden con los periodos de capitalización o de vencimiento. Por ejemplo: Un capital P se colocó por un período de cinco años a una tasa de interés anual **i**; pero por razones imprevistas se interrumpe faltando cuatro meses para su vencimiento, fecha en la que se debe calcular el monto y liquidar la operación.

Comercialmente se acostumbra, calcular el monto a interés compuesto en años completos (4) y por la fracción de tiempo que falta se determina el interés simple sobre monto encontrado y luego se suma obteniéndose el monto total. Pero consideramos oportuno remarcar, que desde el punto de vista técnico el monto debe calcularse a interés compuesto para el total de períodos, incluido la fracción.

Este tipo de problemas lo solucionamos colocando en el exponente de la fórmula, el número de periodos enteros más una fracción. Es decir: $n + \frac{x}{y}$,de manera que la fórmula será: $S = P\left(1 + i\right)^{n+\frac{x}{y}}$

Ejemplo 1.4 Determinar el monto a interés compuesto de S/.5,870 depositado en un banco durante 3 años y 4 meses a la tasa del 16% anual.

$$S = P\left(1 + i\right)^{n+\frac{x}{y}}$$

$$S = 5{,}870\left(1 + 0.16\right)^{3+\frac{4}{12}}$$

$$S = 5{,}870\left(1 + 0.16\right)^{\frac{10}{3}}$$

$$S = 5{,}870\ (1.640060859)$$

$$S = 9{,}627.16$$

1.13 Capitalización Calendaria

Las capitalizaciones: anual, semestral, trimestral, mensual, etc. están referidos a períodos bancarios establecido por el BCR, en los cuales todos lo meses están conformados de 30 días. En cambio la capitalización calendaria, abarca períodos capitalizables en fechas fijas, incluyendo períodos de capitalización variables, dependiendo del número de días contenidos en cada mes del año.

Ejemplo 1.5 Determinar el monto a pagar de un préstamo obtenido el 31 de marzo por S/.20, 000, el mismo que deberá pagarse el 27 de Septiembre del mismo año a una tasa efectiva anual del 16%.

$$S = 20{,}000\left(1 + 0.16\right)^{\frac{180}{360}}$$

$$S = 20{,}000\left(1.16\right)^{0.5}$$

$$S = 21{,}540.66$$

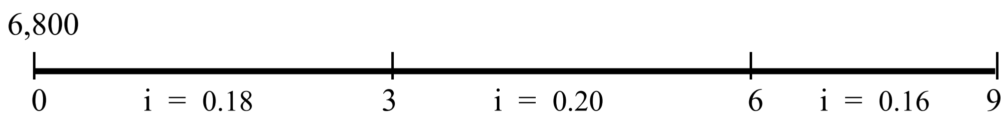
1.14 Monto con Principal Constante y Tasa Efectiva Variable

Si en una operación financiera no se producen aumentos o disminuciones del principal, durante el horizonte temporal, después del primer depósito o colocación inicial, estamos frente a una operación con principal constante.

Si la tasa efectiva aumenta o disminuye durante el horizonte temporal. Se produce una variación en la magnitud de la tasa de interés; por ejemplo cuando una TEA del 16 % aumenta al 18% o disminuye al 14 %.
Además el plazo de la tasa es variable, cuando durante el horizonte temporal la tasa de interés se expresa en diferentes unidades de tiempo; por ejemplo, tasa efectiva anual, tasa efectiva semestral, tasa efectiva trimestral. etc.

Ejemplo 1.6 Calcular el monto en la que se transformó un capital de S/. 6,800, colocado a plazo fijo durante 9 meses. En el transcurso de período la tasa de interés es del 18% los primeros tres meses, del 20 % durante los tres meses siguiente y bajando al 16% los últimos 3 meses.

Fig. 1.3



$$S = 6{,}800\ (1.18)^{0.25}(1.20)^{0.25}\ (1.16)^{0.25}$$

$$S = 7{,}690.20$$

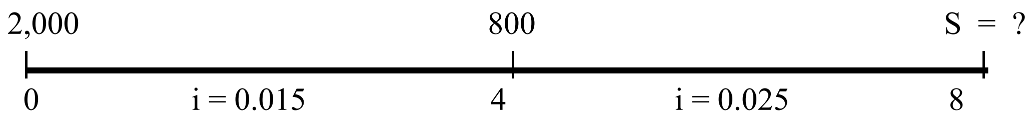
1.15 Monto con Capital y Tasa Efectiva Variables

Durante el horizonte temporal de una cuenta, se presentan casos en los que se producen variaciones en la tasa de interés conjuntamente con el capital. La variación en el capital se presenta cuando se realizan depósitos o retiros generando aumento o disminución del capital según el caso y a la vez la tasa de interés varía de acuerdo a las variaciones del sistema financiero.

En este caso, una forma de solucionar es fraccionando la operación en tramos, durante los cuales el capital y la tasa permanecen constantes.

Ejemplo 1.7 Se deposita en una cuenta de ahorros S/. 2,000 y cuatro meses después se efectúa un nuevo depósito por S/. 800 y se liquida la cuenta cuatro meses después, en dicho período la tasa efectiva mensual del 1.5 % se mantiene constante los primeros cuatro meses, fecha en el que se incrementa a 2.5 % hasta el término de la operación. Calcular el monto al término del horizonte temporal.

Fig. 1.4



$$S = 2000\,(1.02)^2\,(1.015)^4 + (1.025)^4 + 800\,(1.025)^4$$

$$S = 2343.09 + 883.05$$

$$S = 3{,}226.14$$

1.16 Cálculo del Interés Compuesto

Hemos visto que una inversión colocada a interés compuesto a una tasa dada, se convierte en una cantidad mayor llamada monto a un plazo determinado.

La diferencia entre dicho monto y el capital inicial, constituye el interés, que podemos representarlo por: I= S – P

La relación anterior nos indica que para determinar el interés, es necesario primero determinar el monto, para luego sustraer el capital. Pero se puede determinar directamente deduciendo la siguiente fórmula:

De: I = S – P
reemplazamos S por $P(1+i)^n$ obtenemos

$$I = P(1+i)^n - P$$

Sacamos factor común y obtenemos la fórmula:

$$I = P\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Ejemplo 1.8 Determinar el interés compuesto de S/. 20,000. Impuesto a una tasa efectiva del 20% anual durante 4 años.

$$I = P\left[(1+i)^{n} - 1\right]$$

$$I = 20{,}000\ [(1+0.20)^{4} - 1]$$

$$I = 20{,}000\ [(1.20)^{4} - 1]$$

$$I = 20{,}000\ [(2.0736 - 1)]$$

$$I = 20{,}000\ (1.0736)$$

$$I = 21{,}472$$

Para determinar el interés compuesto con aplicación de la tasa nominal. Es decir cuando el período de capitalización es diferente al período de la tasa, la fórmula sufre una modificación con la intervención de la frecuencia de capitalización (m).

$$I = P\left[\ \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n} - 1\ \right]$$

Ejemplo 1.9 Determinar el interés compuesto de un depósito a plazo fijo de S/. 14,000 efectuado en un banco, al 14% anual, capitalizable semestralmente durante 5 años.

$$I = 14{,}000\left[\ \left(1+\frac{0.14}{2}\right)^{10} - 1\ \right]$$

$$I = 14{,}000\left[\ (1+0.07)^{10} - 1\ \right]$$

$$I = 14{,}000(0.967151357)$$

$$I = 13{,}540.12$$

Consideramos oportuno remarcar, que para determinar el valor de la frecuencia de capitalización se debe responder a la pregunta: ¿Cuántos semestres tiene el año?, en este caso y de acuerdo al enunciado, puede ser cuantos meses, bimestres o cualquier otro periodo de tiempo.

1.17 Problemas propuestos

1. Determinar el monto a pagar dentro de un año y cinco meses, por un préstamo bancario de S/. 32,000 a una tasa efectiva mensual del 3%

2. Hallar el valor futuro de S/. 6,000 en un período de 5 años:
   a. A la tasa efectiva del 6 % semestral
   b. A la tasa del 6 % semestral con capitalización mensual

3. Una empresa obtiene un préstamo por S/. 8,000para cancelarse dentro de 4 años y 6 meses, a la tasa del 16% anual con capitalización trimestral. ¿Cuánto pagará a la fecha de liquidación?

4. Una cuenta se apertura el 30 de Abril con S/.15, 000, a una tasa nominal del 3% mensual con capitalización diaria. ¿Qué monto se acumulará desde la fecha de su apertura hasta el 18 de setiembre del mismo año, fecha de su liquidación

5. Calcular el monto en el que se transformó un capital de S/. 16,000, colocado a plazo fijo durante 18 meses, período en el que la tasa de interés sufre las siguientes variaciones: Los primeros 6 meses una tasa efectiva mensual del 2.5%, los 6 meses siguientes el 3 % mensual con capitalización diaria y los últimos 6 meses el 2 % efectivo mensual.

6. Se deposita en una cuenta de ahorros S/. 12,000 y ocho meses después se efectúa un nuevo depósito por S/. 8,000, liquidándose la cuenta después de diez meses más. En dicho periodo la tasa efectiva del 3 % bimestral se mantiene constante los primeros ocho meses, fecha en el que se incrementa a 3.5 % hasta el término de la operación. Calcular el monto al término del período.

7. Calcular el interés producido por un capital de S/. 10,000, a una tasa efectiva trimestral del 4.5 %, en un período de un año y 10 meses

8. ¿Cuánto se pagará de intereses por un préstamo de S/. 40,000 a la tasa del 18% anual con capitalización bimestral.

9. Determinar el interés compuesto de un depósito a plazo fijo de S/. 25,000 efectuado en un banco, al 14% efectivo anual, durante 2 años y 4 meses.

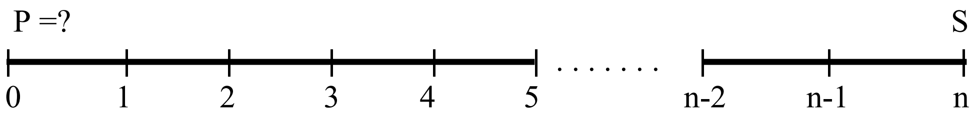
10. Determinar el interés compuesto de una colocación de S/. 24,000 efectuado en un banco, al 2% mensual con capitalización trimestral durante 4 años.

C A P Í T U L O II

2. VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO

Si una cantidad actual llamado capital lo llevamos al futuro mediante el FSC, una cantidad futura llamada monto lo podemos traer al momento actual mediante el factor simple de actualización FSA.

Fig. 2.1



Para clarificar el significado de valor actual o presente, hagamos la siguiente reflexión: Una empresa con la que negocia usted, le adeuda S/.10,000 pagaderos dentro de 5 años, pero existe la posibilidad de ser liquidada ahora, la pregunta es cual es el valor actual de dicha cantidad de acuerdo al sistema financiero vigente.

El tratamiento de este tema en el texto base se encuentra en las páginas 137,138 y 139 respectivamente, iniciándose con el título: Cálculo del Capital Inicial; capital inicial es equivalente a decir valor actual o valor presente.

El valor actual o presente a interés compuesto, de un dinero a recibirse en una fecha futura, es el valor equivalente al dinero que se recibirá en dicha fecha, pero en el período actual.

2.1 Cálculo del Valor Actual

Para el cálculo del valor actual o presente se hace uso del factor simple de actualización FSA, factor que multiplicando por el monto, a una tasa de interés compuesto **i**, a un determinado período de tiempo **n** se obtiene el valor actual.

La fórmula lo deducimos del monto a interés compuesto.

$$S = P(1+i)^n$$

Lo que buscamos es el capital P y lo obtenemos despejando de la ecuación:

$$P = S\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

El factor entre corchetes es el factor simple de actualización, de manera que podemos decir también:

$$P = S\, FSA_{i\,\overline{\,n}}$$

El valor actual se obtiene multiplicando el valor del monto por el factor simple de actualización a una tasa de interés compuesto **i** en **n** períodos de tiempo.

2.2 Factor Simple de Actualización

La expresión $\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$ que multiplica al monto se llama factor simple de

actualización FSA,

El factor simple de actualización, es el valor actual de una unidad monetaria a una tasa **i** por período, durante **n** períodos y su función es traer al presente cualquier cantidad futura o llevar al pasado cualquier cantidad actual.
Ejemplos 2.1 Qué cantidad de dinero deberá depositarse para que capitalizado al 20% de interés efectivo anual durante 3 años se obtenga un monto de S/. 124,416.

Remplazando datos en la fórmula:

$$P = S\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = 124{,}416\left[\frac{1}{(1+0.20)^3}\right]$$

$$P = 124{,}416\ (\ 0.578703703\ )$$

$$P = 72{,}000$$

2.3 Valor Actual en Función de la Tasa Nominal

Para solucionar cualquier problema a interés compuesto, en el que se utilice una tasa nominal capitalizable m veces, se sugiere convertir previamente la tasa nominal a una tasa efectiva, dividiendo la tasa nominal **j** por la frecuencia de capitalización **m** y trabajar como si fuera originalmente una tasa efectiva, remplazando dicha tasa en cualquiera de las formulas de acuerdo al caso

Ejemplo 2.2 Hallar el valor presente de S/. 8,000 pagaderos en 5 años a la tasa nominal anual del 16% capitalizable trimestralmente..

Remplazando datos en la segunda fórmula:

$$P = 8{,}000\left[\frac{1}{(1+0.04)^{20}}\right]$$

$$P = 8{,}000 \text{ x } 0.456386946$$

$$P = 3{,}651.10$$

2.4 Tasa de Interés

Tasa, es el interés generado por una unidad monetaria en un determinado período de tiempo.

La tasa de interés se define también como la razón geométrica entre el interés obtenido en un período de tiempo que por lo general es un año y el capital o stock inicial de dinero.

La tasa toma diferentes nombres de acuerdo al tipo de actividad financiera en el que se le involucra, como las siguientes:

j = Tasa nominal
i = Tasa efectiva
f = Tasa de inflación
r = Tasa real
d = Tasa de descuento

La tasa nominal y efectiva, de acuerdo a las entidades financieras, pueden ser activas o pasivas, según se deriven de las operaciones financieras activas o pasivas efectuadas por las mencionadas instituciones.

Son activas las colocaciones de dinero que realizan las entidades financieras, tales como: préstamos, descuentos, sobregiros, etc.

Son pasivas las operaciones realizadas por las instituciones financieras, parta captar recursos financieros tales como: las captaciones en ahorros, depósitos a la vista, depósitos a plazo fijo, etc.

2.5 Tasa nominal

La tasa de interés nominal (j) es aquella que tiene como base un año y muestra el número de veces (m) que capitaliza al año; no indica el costo real del dinero o la rentabilidad de una inversión.

Cuando una tasa es susceptible de transformarse en una tasa proporcional o periódica, dividiéndose o multiplicándose para ser expresada en otra unidad de tiempo diferente a la original, recibe el nombre de tasa nominal.

Dicho de otra manera, es la que se aplica directamente a operaciones de interés simple y lo representamos por **j,** y es susceptible de dividirse o multiplicarse **m** veces en un año, para ser expresado en otra unidad de tiempo a la que se conoce como tasa proporcional $\frac{j}{m}$ o j x n, según el caso. .

La tasa proporcional derivada de la tasa nominal puede ser capitalizada n veces durante el horizonte temporal de una operación financiera; donde **m** es la frecuencia de capitalización durante un año.

En las operaciones a interés compuesto el concepto de tasa nominal por lo general surge cuando la tasa convenida es anual y el periodo de capitalización es menor a un año; de manera que podemos decir, tasa anual con capitalización semestral trimestral, mensual u otro período. Además la tasa nominal, puede darse en diferentes períodos de tiempo como por ejemplo, tasa semestral con capitalización trimestral, tasa trimestral con capitalización mensual, etc.

Reiterando además que la tasa nominal también puede estar dado en un período menor al período de capitalización, esto nos autoriza a proponer por ejemplo, una tasa nominal mensual con capitalización trimestral.

Al resultado de dividir o multiplicar la tasa según sea el caso se le denomina tasa proporcional, de acuerdo a lo manifestado líneas arriba.
.

Ejemplo 2.3. Si la tasa de interés nominal es del 24% anual, las tasas proporcionales en períodos menores lo obtenemos de la siguiente manera:

Para un semestre $j = \left(\frac{0.24}{2}\right) x\ 1 = 0.12$

$J = 12\%$

Para un trimestre $j = \left(\frac{0.24}{4}\right) x\ 1 = 0.06$

$J = 6\%$

Para un mes $j = \left(\frac{0.24}{12}\right) x\ 1 = 0.02$

$J = 2\%$

Para 18 días $\quad j = \left(\dfrac{0.24}{360}\right) x\ 18 = 0.012$

$J = 1.2\ \%$

Consecuentemente, si la tasa nominal es 1.5% mensual la tasa proporcional en un período mayor lo obtenemos multiplicando:

Para un trimestre $\quad j = 0.015 \text{ x } 3 = 0.045$
$J = 4.5\ \%$

Para un semestre $\quad j = 0.015 \text{ x } 6 = 0.09$
$J = 9\ \%$

Para un año $\quad j = 0.015 \text{ x } 12 = 0.18$
$J = 18\ \%$

El monto a interés compuesto aplicando una tasa nominal **J** capitalizable **m** veces durante un determinado espacio de tiempo que por lo general es un año, durante **n** periodos que constituye el horizonte temporal de una operación financiera, se calcula con la formula:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^n$$

De la cual deducimos una fórmula que nos permite calcular la tasa nominal

$$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^n = \frac{S}{P}$$

$$1 + \frac{J}{m} = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

$$\frac{J}{m} = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

$$j = m\left(\sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1\right)$$

Ejemplos 2.4 Si la cantidad de 100,000 capitalizado trimestralmente durante 4 años, asciende a S/. 180,000 ¿cuál es la tasa de interés nominal anual?.

$$j = 4\left(\sqrt[16]{\frac{180{,}000}{100{,}000}} - 1\right)$$

$$j = 0.1497$$

$$j = 14.97\ \%$$

Ejemplo 2.5 Al cabo de 3 años y 8 meses, se retira los intereses de un depósito, los mismos que ascienden a S/.33,718, si la capitalización es semestral, ¿A qué tasa de interés se depositó la cantidad de S/. 45,000?,

Reemplazando valores en la fórmula, encontramos que el monto es desconocido; pero por su definición sabemos que éste está constituido por el capital más los intereses, luego tenemos:

$$j = m\left(\sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1\right)$$

$$j = 2\left[\sqrt[2\left(\frac{44}{12}\right)]{\frac{78{,}718}{45{,}000}} - 1\right]$$

$$j = 2\left(\sqrt[\frac{22}{3}]{1.74929.} - 1\right)$$

$$j = 2 \times 0.079238728$$

$$j = 0.1585$$

$$j = 15.85\ \%$$

2.6 Tasa Efectiva

Es aquella que indica cual es efectivamente cual es la rentabilidad de una inversión o cual es el costo de un crédito por periodo.

Es el verdadero rendimiento que produce un capital en una operación financiera; es la que efectivamente actúa sobre el capital, refleja el tiempo o frecuencia de capitalización o conversión de los intereses en capital. El hecho de capitalizar el interés dos o más veces durante un año, da lugar a una tasa efectiva anual mayor a la tasa nominal anual.

Dicha tasa denota un rendimiento o un costo efectivo, según se trate de una operación activa o pasiva.

Para deducir la fórmula, partimos del razonamiento siguiente: la tasa efectiva es igual al interés dividido por el capital (I/P) y el interés es igual al monto menos el capital (S – P), luego tenemos:

$$i = \frac{S - P}{P}$$

Reemplazando S por su fórmula a partir de una tasa nominal **j** y una frecuencia de capitalización **m** se tiene:

$$i = \frac{P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{n} - P}{P}$$

Simplificando el segundo miembro obtenemos la formula requerida en base a la tasa nominal:

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{n} - 1$$

Ejemplo 2.6 Un ahorrista desea saber, cuál el la tasa efectiva de interés anual de un depósito efectuado en un banco que paga el 12% de interés con capitalización diaria.

$$i = \left(1+\frac{0.12}{360}\right)^{360} - 1$$

$$i = (1.000333333)^{360} - 1$$

$$i = 0.1275$$

$$i = 12.75\%$$

De acuerdo a los datos de los que se disponga, la fórmula de la tasa efectiva también lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$i = \left(1+\frac{I}{P}\right)^{n} - 1$$

Ejemplo 2.7 Calcular la tasa efectiva anual, que se impuso a un depósito efectuado en una cuenta de ahorros por S/. 6,000 y generó un interés compuesto de 360 en un período de tres meses.

$$i = \left(1+\frac{360}{6,000}\right)^{4} - 1$$

$$\mathbf{i} = 0.2625$$

$$\mathbf{i} = 26.25\ \%$$

Ejemplo 2.8 Un capital de S/. 40,000 es colocado por un período de 5 años a una tasa de interés convertible trimestralmente, generando un monto de S/. 83,526.08. Calcular la tasa efectiva anual

$$i = \left(1 + \frac{43{,}526.08}{40{,}000}\right)^{\frac{4}{20}} - 1$$

$$i = (2.088152)^{1/5} - 1$$

$$i = 0.15865$$

$$i = 15.865\% \quad \text{tasa efectiva anual}$$

En este caso cuando se conoce el monto, el capital, el período de tiempo y la frecuencia de capitalización, tasa efectiva anual también lo calculamos de la siguiente manera:

Primero calculamos la tasa efectiva de acuerdo a la frecuencia de capitalización, en este caso trimestral, con la fórmula:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

$$i = \sqrt[20]{\frac{83{,}526.08}{40{,}000}} - 1$$

$$i = 0.0375$$

$$i = 3.75\% \quad \text{tasa efectiva trimestral}$$

Luego calculamos la tasa efectiva anual, de la siguiente manera

$$i = (1 + 0.0375)^4 - 1$$

$$i = 0.15865$$

$$i = 15.865\% \quad \text{tasa efectiva anual}$$

Ejemplo 2.9 Calcular la tasa efectiva trimestral de una colocación de S/. 5,000 por un período de 1 año, espacio de tiempo en el cual se obtuvo por concepto de intereses la cantidad de S/. 849.29

$$i = \left(1 + \frac{849.29}{5{,}000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$i = (1.169858)^{1/4} - 1$$

$$i = 0.04$$

$$i = 4\ \% \quad \text{Trimestral}$$

O también:

$$i = \sqrt[4]{\frac{5,849.29}{5,000}} - 1$$

$$i = 0.04$$

$$i = 4\% \quad \text{Trimestral}$$

2.7 Conversión de Tasas

Ya hemos visto que a partir de una tasa nominal se obtiene una tasa efectiva, en consecuencia se pueden obtener cálculos inversos, o cálculos relacionados como el caso de convertir una tasa efectiva en otra tasa efectiva de diferente período.

2.8 Conversión de una Tasa Efectiva en otra Efectiva de diferente Período

A partir de una tasa efectiva se puede obtener otra tasa efectiva de diferente período. Cuando dos o más tasas efectivas correspondientes a diferentes unidades de tiempo, se le denominan **equivalentes** cuando se convierten en la misma tasa efectiva en el mismo horizonte temporal.

Ejemplo 2.10 Convertir la tasa efectiva mensual del 1.5% en tasa efectiva trimestral, semestral y anual.

$$\text{TET} = (1 + TEM)^n - 1$$

$$\text{TET} = (1.015)^3 - 1$$

$$\text{TET} = 0.045678$$

$$\text{TET} = 4.57\%$$

$$\text{TES} = (1 + TEM)^n - 1$$

$$\text{TES} = (1.015)^6 - 1$$

$$\text{TES} = 0.0934433$$

TES = 9.34 %

$$TEA = (1+TEM)^n - 1$$

$$TEA = (1.015)^{12} - 1$$

TEA = 0.195618

TEA = 19.5618 %

Ejemplo 2.11 Convertir la tasa efectiva anual del 16.986% en tasa efectiva semestral y trimestral.

$$TES = \sqrt[n]{1+TEA} - 1$$
$$TES = \sqrt{1+0.16986} - 1$$
TES = 0.0816
TES = 8.16 %
$$TET = \sqrt[n]{1+TEA} - 1$$
$$TET = \sqrt[4]{1+0.16986} - 1$$
TET = 0.04
TET = 4 %

2.9 Conversión de una Tasa Efectiva en una Tasa Nominal

Si a para calcular la tasa efectiva interviene la tasa nominal, efectuando cálculos inversos, lógico es que obtengamos la tasa nominal **j** capitalizable **m** veces.

La fórmula lo deducimos de la tasa efectiva.

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^n - 1$$

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^n = 1 + I$$

$$1+\frac{j}{m} = \sqrt[n]{1+i}$$

$$\frac{j}{m} = \sqrt[n]{1+i} - 1$$

$$j = m\left(\sqrt[n]{1+i} - 1\right)$$

Ejemplo 2.12 Si un banco paga por depósitos en cuentas de ahorro una tasa efectiva anual del 12.75% ¿Cuál será la tasa nominal anual con capitalización diaria?

$$TNA = m\left(\sqrt[n]{1+TEA}-1\right)$$

$$TNA = 360\left(\sqrt[360]{1+0.1275}-1\right)$$

$$TNA = 0.12$$

$$TNA = 12\ \%\quad \text{anual}$$

Ejemplo 2.13 ¿Cuál será la tasa nominal semestral capitalizable trimestralmente, si la tasa efectiva anual es 20.17%?

$$TNS = m\left(\sqrt[n]{1+TEA}-1\right)$$

$$TNS = 2\left(\sqrt[4]{1+0.2017}-1\right)$$

$$TNS = 0.094$$

$$TNS = 9.4\ \%\quad \text{semestral}$$

Para deducir la fórmula que nos permita convertir una tasa efectiva en una tasa nominal, también podemos utilizar el siguiente razonamiento: El monto de 1 a la tasa efectiva **i**, transcurrido un período es 1+i, y el monto de 1 a la tasa nominal **j** en el mismo período a una frecuencia de capitalización m es $(1+j/m)^n$; la ecuación de equivalencia entre estos dos montos es:

$$1+i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^n$$

Despejando j de la ecuación:

$$1+\frac{j}{m} = \sqrt[n]{1+i}$$

$$\frac{j}{m} = \sqrt[n]{1+i}-1$$

$$j = m(\ \sqrt[n]{1+i}-1\ )$$

2.10 Tasa de Inflación

La tasa de inflación es una tasa efectiva, indicadora del crecimiento sostenido de los precios de los bienes y servicios de la economía, en un período de tiempo determinado, (calculada por Instituto Nacional de Estadística e Informática INEI) sobre la base de una canasta básica de consumo familiar, tomada en una fecha cuya estructura de costos en la actualidad esta referido al año base 1994.

Para el cálculo de la tasa de inflación se utiliza el índice de precios al consumidor IPC, debido a que es uno de los indicadores económicos más importantes que permite conocer el comportamiento inflacionario en una determinada economía; debido a que mide la variación promedio de precios de los bienes y servicios consumidos habitualmente por un conjunto de familias con diversos niveles de ingreso, en una determinada arrea geográfica.

Para calcular la tasa de inflación a la que lo representamos por f hacemos uso de la fórmula:

$$f = \frac{IPC_n}{IPC_0} - 1$$

IPC_n = IPC actual

IPC_0 = IPC base

EVOLUCIÓN DE LA INFLACIÓN EN EL PERÚ
Variación porcentual anual

Año	IPC	Inflación
1991	41.67295000	139.23%
1992	65.31565000	56.73%
1993	91.10207000	39.48%
1994	105.1200000	15.39%
1995	115.8700000	10.23%
1996	129.5900000	11.84%
1997	137.9600000	6.46%
1998	146.2500000	6.01%
1999	151.7000000	3.73%
2000	157.3600000	3.73%
2001	157.1600000	(0.13%)
2002	101.5200000	1.52%
2003	104.0400000	2.48%
2004	107.6600000	3.48%

Ejemplo 2.14 Calcular la tasa de inflación para el año 2004, con los índices de precios al consumidor de la tabla.

En este caso consideramos que los índices de precios están dados al 31 de diciembre de cada año.

$$f = \frac{IPC_n}{IPC_0} - 1$$

$$f = \frac{107.66}{104.04} - 1$$

$$f = 0.0348$$

$$f = 3.48\ \%$$

Con la fórmula podemos calcular la inflación anual, semestral, trimestral, mensual etc. Utilizando correspondientemente los índices de precios.

2.11 Cálculo de la Tasa Real

Es la tasa de interés efectiva anual deflactada. Es decir la tasa efectiva anual deducida el efecto de la inflación o de la elevación de los precios.

En el estudio de las tasas hasta el momento, hemos obviado el efecto de la inflación, tal es así que en el valor nominal de la unidad monetaria no se tomó en cuenta la variación de su poder adquisitivo a través del tiempo por el incremento general de los precios de los bienes y servicios. La tasa real permite medir el grado en el que los valores nominales que se ubican en el futuro serán erosionados por la inflación.

Cuando la inflación en un país es alta, la variación de los precios de los bienes y servicios generan disminución en la capacidad adquisitiva del dinero. Para ajustar el valor nominal del dinero a fin de que refleje su valor real, hacemos uso de la tasa deflactada, deduciendo el efecto de la tasa inflacionaria del mismo período; llamada tasa real:

$$r = \frac{1+i}{1+f} - 1$$

o también

$$r = \frac{i-f}{1+f}$$

En el que

i = Tasa efectiva anual

f = Tasa de inflación

r = Tasa real

Ejemplo 2.15 Las empresas más importantes del Departamento de Ancash han efectuado aumentos de sueldos y salarios a sus trabajadores en el orden del 22 %, 18 %, 14 % y 10 %, en una economía con una tasa anual promedio de inflación del 14 %. Determinar la tasa real de incremento de sueldos y salarios.

Con el uso de la primera fórmula:

$$r = \frac{1+0.22}{1+0.14} - 1$$

$$r = 0.0702$$

r = 7.02 % de aumento real

$$r = \frac{1+0.18}{1+0.14} - 1$$

$$r = 0.0351$$

r = 3.51 % de aumento real

$$r = \frac{1+0.14}{1+0.14} - 1$$

$$r = 0$$

$$r = 0\% \text{ de aumento real}$$

Cuando por disposiciones legales se establece que los sueldos y salarios están indexados a la tasa inflacionaria, los aumentos deben ser equivalentes al aumento de la tasa de inflación, neutralizando los efectos de la inflación manteniendo estable el nivel de vida de los trabajadores, sin mejorarlo ni empeorarlo realmente.

Pero cuando porcentualmente los aumentos monetarios de sueldos y salarios son inferiores a la tasa inflacionaria, la tasa real es negativa, indicador que refleja una pérdida del poder adquisitivo del dinero recibido por concepto de remuneraciones

$$r = \frac{1+0.10}{1+0.14} - 1$$

$$r = -0.0351$$

$$r = 3.51\ \% \text{ de disminución real}$$

Por consiguiente un aumento del 10 % no compensa la pérdida del valor real de los sueldos y salarios por estar por debajo de la tasa inflacionaria.

Ejemplo 2.16 Calcular la tasa real de un préstamo que debe ser revertido en seis meses a una tasa efectiva anual del 20% y la tasa inflacionaria acumulada durante el período se estima en el 4%.

Previamente determinamos la tasa efectiva semestral

$$TES = \sqrt{1+0.20} - 1$$

$$TES = 0.095445115$$

$$TES = 9.54\ \%$$

Remplazamos datos en la formula y obtenemos la tasa real

$$r = \frac{1+0.0954}{1+0.04} - 1$$

$$r = 0.0533$$

$$r = 5.33\ \% \quad \text{en seis meses}$$

2.11. 1 Tasas Reajustadas por Efectos de Inflación

De acuerdo a los resultados: la tasa efectiva semestral es del 9.54% y una tasa real del 5.33% y la tasa de inflación de acuerdo a los datos del 4%.

Observamos que la tasa real es menor a la tasa efectiva. Pero si se requiere mantener el valor de la tasa real equivalente a la tasa efectiva lo reajustamos de la siguiente manera:

Calculamos la nueva tasa efectiva

$$i = (1+i)\ (1+f)\ - 1$$

$$i = (1+0.0954)\ (1+0.04)\ - 1$$

$$i = 0.1392$$

La nueva tasa real ajustada por efectos de inflación

$$r = \frac{1+0.1392}{1+0.04} - 1$$

$$r = 0.0954$$

$$r = 9.54\ \%$$

2.12 **Cálculo del Tiempo**

La variable tiempo **n**, es otro elemento determinante en el manejo de las operaciones financieras. El símbolo **n** indica el número de unidades de tiempo a la que hace referencia la tasa; esto implica, que si la tasa es anual **n** es el número de años, si la tasa es trimestral **n** es el número de trimestres y así sucesivamente.

El tiempo es el número de periodos de capitalización que comprende el horizonte temporal de una operación financiera.

Es necesario tener claro que matemáticamente el valor del tiempo es aproximado no exacto, dado a que las fracciones decimales centesimales o cualquier otra fracción son aproximaciones a un determinado período.

La fórmula lo deducimos partiendo de la fórmula del monto

$$S = (1+i)^n$$

Aplicando logaritmos

$$\text{Log } S = \text{Log } P + n \text{ Log } (1+i)$$

$$\text{Log } P + n \text{ Log } (1+i) = \text{Log } S$$

$$n = \frac{.Log.S - \log.P}{Log.(1+i)}$$

Ejemplo 2.17 ¿Qué, tiempo será necesario para que un capital de S/. 100,000 soles colocado al 20% anual se convierta en S/. 172,800?

$$n = \frac{.Log.S - \log.P}{Log.(1+i)}$$

$$n = \frac{.Log.172,800 - \log.100,000}{Log.(1+0.20)}$$

$$n = \frac{.Log.172,800 - \log.100,000}{Log.(1.20)}$$

$$n = \frac{.5.237543738 - 5}{0.079181246}$$

n = 3 años

Ejemplo 2.18 Se deposita S/. 20,000 al 24% anual con capitalización trimestral recibiendo S/. 210,900 después de cierto tiempo; ¿cuánto duró el depósito?

En este caso, estamos frente a un problema en la que la tasa es nominal con capitalización frecuente, de manera que en el denominador de la fórmula, hacemos participar a la frecuencia de capitalización **m** a fin de que el numero de períodos nos arroje en años.

$$n = \frac{.Log.S - \log.P}{mLog.(1+\frac{i}{m})}$$

$$n = \frac{.Log.210,900 - \log 20,000}{4Log.(1+\frac{0.24}{4})}$$

$$n = \frac{.Log.210,900 - \log 20,000}{4Log.(1.06)}$$

$$n = \frac{.5.32407658 - 4.301029996}{4x0.025305865}$$

$$n = \frac{.5.32407658 - 4.301029996}{4x0.025305865}$$

n = 10.11 años.

Equivalente a 10 años 1 mes y 9 días

2.13. Listado de Formulas

Fórmula	Factor	Obtiene

$S = P(1+i)^n$ $S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^n$	FSC	Monto compuesto
$P = S\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]$	FSA	Valor actual o0 capital
$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$ $i = \sqrt[n]{1+\frac{I}{P}} - 1$		Tasa de interés efectiva
$n = \frac{\text{Logs - logp}}{\log(1+i)}$		Número de periodos de capitalización
$I = P\left[(1+i)^n - 1\right]$		Interés
$P = \frac{I}{(1+i)^n - 1}$		Capital
$i = \frac{j}{m}$		Tasa efectiva por periodo de capitalización
$J = m\left(\sqrt{\frac{S}{P}} - 1\right)$		Tasa nominal capitalizable m veces
$P = S\left[\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^n}\right]$		Capital con tasa nominal
$r = \frac{1+i}{1+f} - 1$		Tasa real

2.14 Problemas propuestos

1. Hallar la cantidad necesaria a depositar en una cuenta que paga el 20 % anual con capitalización trimestral, para disponer de S/. 22,00 al término de 8 años.

2. Una persona debe pagar S/ 30,000 dentro de 2 años y acuerda con su acreedor pagar S/. 10,000 de inmediato y por el resto firmar un pagaré con vencimiento a 3 años. ¿Cuál será el valor del pagaré?.

3. Hace 8 meses se depositó en un banco un capital al 2.5 % efectivo mensual. Determinar el valor del depósito si el monto acumulado es de S/. 3,898.89.

4. Cuanto será necesario depositar en una cuenta que paga el 18 % anual con capitalización diaria, para disponer de S/. 18,000 dentro de 180 días?.

5. Un capital de S/. 28,000 se coloca en dos partes; la primera a una tasa efectiva anual del 18 % y la segunda a una tasa efectiva anual del 20 % y al término de 10 años, el monto de la primera es el triple del monto de la segunda. Determinar cuanto se colocó en cada caso.

6. Calcular la tasa efectiva trimestral necesaria aplicar a una colocación de S/.4000 para generar un interés de S/. 679.43 durante un año.

7. Al cabo de 2 años y 6 meses, se dispone de un fondo de S/. 6,661.10. ¿A qué tasa de interés nominal con capitalización trimestral se depositó la cantidad de S/. 4,500?,

8. Cuál será la tasa nominal anual que capitalizable mensualmente, sea equivalente a una tasa efectiva anual del 19.56

9. ¿Qué tasa capitalizable semestralmente es equivalente al 12% capitalizable trimestralmente?.

10. ¿Cuánto tiempo será necesario para que un capital de S/. 6,000 se convierta en S/. 9,650.62 a una tasa nominal anual del 24 % con capitalización mensual?.

C A P Í T U L O III

3. DESCUENTO COMPUESTO Y ECUACIONES DE VALOR

Una operación de descuento consiste en obtener el pago anticipado de un título valor o de un documento de crédito como el pagaré, letra de cambio, bono, etc. deduciendo el interés llamado descuento, por el tiempo que falta para su vencimiento.

En el tema del descuento se presentan dos casos:
a. El descuento compuesto racional o descuento verdadero y;
b. El descuento compuesto bancario.

3.1 Descuento Racional o Verdadero

Este tipo de descuento compuesto es la diferencia entre el valor futuro por pagar y su valor actual o efectivo y lo representamos por "D".

El descuento compuesto racional, equivale a la suma de los réditos que generan los valores efectivos parciales, a una tasa de interés que para el efecto lo llamamos tasa de descuento.

La tasa de descuento es la diferencia del valor nominal de un sol y su valor actual en un periodo determinado y lo representamos por "d".

3.2 Cálculo del Descuento

De la definición se deduce que el descuento compuesto es la diferencia entre el valor nominal o futuro y el valor actual de una deuda especificada de un documento de crédito. Esto lo representaremos matemáticamente con la relación siguiente:

$$D = Vn - Va$$

Si por equivalencia hacemos al Vn = S y al Ve = P tendremos que el descuento compuesto es equivalente a la diferencia entre el valor nominal o monto a interés compuesto y el valor actual o importe recibido en el presente.

$$D = Vn - Ve$$

Entonces podemos expresar las relaciones siguientes:

$$Vn = Ve\,(1+d)^n \quad y;$$

$$Ve = Vn\left[\frac{1}{(1+d)^n}\right]$$

Remplazando en la definición del descuento tenemos

$$D = Vn - Vn\left[\frac{1}{(1+d)^n}\right]$$

Factorizando:

$$D = Vn\left[1-\frac{1}{(1+d)^n}\right]$$

Ejemplo 3.1 ¿Cuál es el descuento compuesto que se obtendría de un pagaré cuyo valor nominal es de S/. 100,000 sometido a descuento 4 años antes de su vencimiento a la tasa de descuento del 24% anual?

Aplicando la fórmula:

$$D = 100{,}000\left[1-\frac{1}{(1+0.24)^4}\right]$$

$$D = 100{,}000\left[1-\frac{1}{(1.24)^4}\right]$$

$$D = 100{,}000\,(0.5770264)$$

$$D = 57{,}702.64$$

Aplicando la definición que el descuento es la suma de los réditos generados por los efectivos parciales lo explicamos mediante la escala de tiempo determinando el valor efectivo para cada período y luego calculamos los descuentos parciales, que sumados nos da el descuento total.

Fig. 3.1

42,297.36	52,448.73	65,036.42	80,645.16	100,000

Réditos parciales:

$$
\begin{array}{rcccr}
42{,}297.36 & \times & 0.24 & = & 10{,}151.37 \\
52{,}448.73 & \times & 0.24 & = & 12{,}587.69 \\
65{,}036.42 & \times & 0.24 & = & 15{,}608.74 \\
80{,}645.16 & \times & 0.24 & = & \underline{19{,}354.84} \\
 & & & & 57{,}702.64 \quad \text{Descuento}
\end{array}
$$

Ejemplo 3.2 Si el ejercicio anterior estuviera afectado por una tasa de descuento compuesto con una capitalización semestral, el descuento sería:

$$D = Vn\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{d}{m}\right)^{n}}\right]$$

$$D = 100{,}000\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{0.24}{2}\right)^{8}}\right]$$

$$D = 100{,}000\left[1-\frac{1}{(1.12)^{8}}\right]$$

$$D = 100{,}000\ (0.596116772)$$

$$D = 59{,}611.68$$

3.3 Cálculo del Valor Nominal y Valor Efectivo

El valor nominal lo podemos obtener en base al descuento o en base al valor efectivo.

Para el primer caso deducimos la fórmula a partir del descuento y utilizamos los datos del ejercicio anterior

$$D = Vn\left[1-\frac{1}{(1+d)^{n}}\right]$$

$$D = Vn\left[\frac{(1+d)^{n}-1}{(1+d)^{n}}\right]$$

$$Vn = D\left[\frac{(1+d)^{n}}{(1+d)^{n}-1}\right]$$

$$Vn = 59{,}611.68\left[\frac{(1.12)^{8}}{(1.12)^{8}-1}\right]$$

$$Vn = 100{,}000.00$$

En base al valor efectivo:

$$Vn = Ve\,(1+d)^{n} \quad y;$$

Ejemplo 3.3 Calcular el valor nominal de un pagaré sometido a descuento compuesto 4 años antes de su vencimiento a la tasa de descuento del 24% anual, si se conoce que el valor efectivo es de S/.42,297.36.

$$Vn = 42{,}297.36\,(1+0.24)^{4}$$

$$Vn = 42{,}297.36\,(2.36421376)$$

$$Vn = 100{,}000$$

El valor efectivo lo obtenemos a partir de la fórmula del valor nominal

$$Ve = Vn\left[\frac{1}{(1+d)^{n}}\right]$$

Ejemplos 3.4 Hallar el valor efectivo racional compuesto de una letra de valor S/.100, 000, si se le somete a descuento 4 años antes de su vencimiento, a una tasa de descuento del 24% anual con capitalización semestral

$$Ve = 100{,}000\left[\frac{1}{\left(1+\frac{0.24}{2}\right)^{8}}\right]$$

$$Ve = 100{,}000\left[\frac{1}{\left(1+\frac{0.24}{2}\right)^{8}}\right]$$

$$Ve = 100{,}000(0.403883228)$$

$$Ve = 40{,}388.32$$

3.4 Descuento Bancario Compuesto

En el descuento bancario el valor líquido de un título valor es menor que su valor presente calculado a una tasa de interés vencida, debido a que el descuento bancario se obtiene sobre el valor nominal, es decir sobre el valor futuro de un documento de crédito o título valor. En consecuencia el descuento bancario es mayor que el interés.

La tasa de interés aplicada para efectos del descuento, se le denomina tasa de descuento **d** y constituye una tasa adelantada diferente de la tasa vencida **i** dada a que **i** se aplica sobre el valor presente P y **d** sobre el valor nominal o futuro, que lo representamos por Vn, originando un valor liquido VL menor al valor presente del documento.

Para efecto de los cálculos en la solución de problemas de aplicación utilizaremos la simbología siguiente:

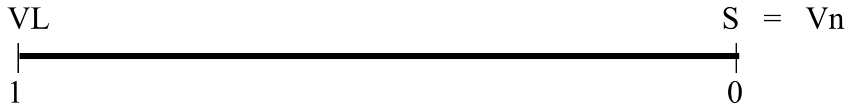
D = Descuento bancario compuesto
Vn = Valor nominal del documento
VL = Valor líquido del documento
d = Tasa de descuento compuesto

La fórmula del descuento y el correspondiente valor líquido lo deducimos de la manera siguiente:

Considerando que para obtener el valor líquido de un documento desplazamos el valor nominal de un documento de crédito o titulo valor derecha a izquierda.

Valor líquido y el descuento en un período será:

Fig. 3.2



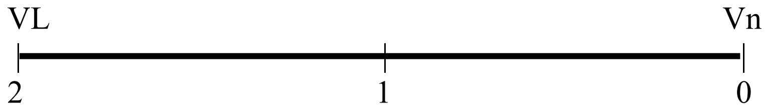
Para el tratamiento del tema, remplazamos el valor futuro S por el valor nominal Vn

$$VL = Vn(1-d)$$

$$D = Vn\,[1-(1-d)]$$

El valor líquido y el descuento para dos períodos

Fig. 3.3



$$VL = S(1-d)^2$$

$$D = Vn\,[1-(1-d)^2]$$

En consecuencia, el valor liquido y el descuento para n períodos será:

$$VL = Vn\,(1-d)^n$$

$$D = Vn\,[1-(1-d)^n]$$

El factor $(1-d)^n$ es el valor líquido de una unidad, al tipo de descuento periódico **d** en **n** períodos de tiempo.

Ejemplo 3.5 Hallar el descuento y el valor líquido que se obtendría de un pagaré de S/. 5,000, si se le sometiera a descuento 8 años antes de su vencimiento al 16% anual.

$$D = 5{,}000\,[1-(1-0.16)^8]$$

$$D = 3{,}760.62$$

$$VL = 5{,}000(1-0.16)^8$$
$$VL = 1{,}239.38$$

Ejemplo 3.6 Hallar el descuento y el valor líquido que se obtendría de un pagaré de S/. 50,000, si se le sometiera a descuento 15 semestres antes de su vencimiento a la tasa de descuento del 8% semestral.

$$D = 50{,}000\,[1-(1-0.08)^{15}]$$

$$D = 35{,}685.13$$

$$VL = 50{,}000(1-0.08)^{15}$$
$$VL = 14{,}314.87$$

Cuando la tasa de descuento está dada con capitalización en períodos frecuentes:

$$D = Vn\,\left[1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^n\right]$$

$$VL = Vn\,\left(1-\frac{d}{m}\right)^n$$

Ejemplo 3.7 Calcular el descuento y el valor líquido que se obtendría de una letra de S/. 75,000, si se le sometiera a descuento 4 años y 3 meses antes de su vencimiento al 24% anual con capitalización trimestral.

$$D = 75{,}000\left[1-\left(1-\frac{0.24}{4}\right)^{(4+\frac{3}{12})4}\right]$$

$$D = 75{,}000\left[1-(0.94)^{17}\right]$$

$$D = 48{,}804$$

$$VL = 75{,}000\left(1-\frac{0.24}{4}\right)^{(4+\frac{3}{12})4}$$

$$VL = 75{,}000\,(0.94)^{17}$$

$$VL = 26{,}195.99$$

Para calcular el valor nominal en el descuento bancario hacemos uso de la fórmula:

$$Vn = VL\left[\frac{1}{(1-d)^{n}}\right]$$

Utilizando los valores del ejercicio anterior

$$Vn = 26{,}195.99\left[\frac{1}{(1-0.06)^{17}}\right]$$

$$Vn = 75{,}000$$

3.5 Ecuaciones de Valor

En finanzas la liquidación de una operación financiera no siempre se realiza a su vencimiento, pudiendo adelantarse o postergarse. Esto implica que un stock de dinero ubicado en un determinado momento del horizonte temporal, puede trasladarse a otro momento y convertirse en un stock equivalente, motivado por distintas razones ajenas a la voluntad de los agentes económicos, situaciones en las que se originan las ecuaciones de valor.

Pues entonces, una cantidad de dinero lo podemos traer del pasado al presente y de presente lo podemos llevar al futuro mediante el factor de capitalización y del futuro lo podemos trasladar al presente y del presente al pasado aplicando el factor de actualización, manteniendo su equivalencia en ambos casos, si la tasa efectiva es la misma.

3.6 Ecuaciones de Valor a Interés Compuesto

Son las ecuaciones que se forman igualando en una fecha de comparación o fecha focal, dos o más obligaciones con diferentes vencimientos, para establecer un valor equivalente que puede liquidarse con un sólo pago.

Ecuaciones que nos permiten resolver diferente problemas a interés compuesto, de los cuales los básicos son:

a. Establecer el valor equivalente al valor de un conjunto de obligaciones con vencimientos diferentes, que deben liquidarse con un sólo pago y en una sola fecha.

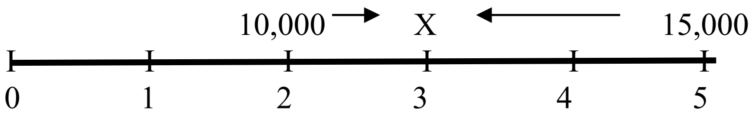
b. Determinar la fecha de vencimiento promedio, en el que puede cancelarse mediante un pago único, igual a la suma de los valores de un conjunto de obligaciones, que tienen diferentes fechas de vencimiento. El tiempo por transcurrir hasta la fecha de vencimiento promedio se define como **tiempo equivalente.**

3.7 Valor Equivalente

Consiste en determinar el valor de un pago único, que reemplace a un conjunto de obligaciones, en una fecha determinada llamada fecha focal.

Ejemplo 3.8. Una persona acepta dos pagarés de S/. 10,000 y S/. 15,000, con vencimientos dentro de 2 y 5 años respectivamente. Si en lugar de ellos pacta con su acreedor para cancelarlas con un sólo pago al final de 3 años a la tasa del 20% anual convertible semestralmente. Calcular el valor del pago único.

Fig. 3.4



$$X = 10{,}000\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{2} + 15{,}000\left[\frac{1}{\left(1+\frac{0.20}{2}\right)^{4}}\right]$$

$$X = 12{,}100 + 10{,}245.20$$

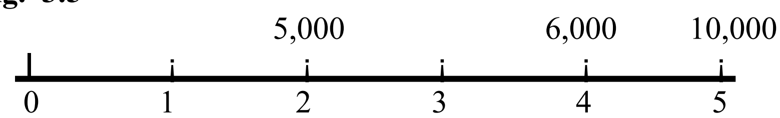
$$X = 22{,}345.20$$

3.8 Vencimiento Medio de obligaciones

Consiste en determinar una fecha promedio de vencimiento, de un conjunto de obligaciones con vencimientos diferentes.

Ejemplo 3.9. Calcular la fecha del vencimiento medio de las siguientes obligaciones S/. 5,000, S/. 6,000 y S/. 10,000 con vencimientos a 2, 4, y 5 años respectivamente a la tasa de interés del 16% anual.

Fig. 3.5



Formamos una ecuación actualizando todos los valores de acuerdo a sus vencimientos; es decir lo llevamos al período cero.

$$21{,}000\,(1+0.16)^{-n} = 5{,}000(1+0.16)^{-2} + 6{,}000(1+0.16)^{-4} + 10{,}000(1+0.16)^{-5}$$

$$21{,}000\,(1.16)^{-n} = 3{,}715.81 + 3{,}313.75 + 4{,}761.13$$

$$21{,}000\,(1.16)^{-n} = 11{,}790.69$$

$$(1.16)^{-n} = \frac{11{,}790.69}{21{,}000}$$

$$(1.16)^{-n} = 0.561461428$$

$$-n \log 1.16 = \log 0.561461428$$

$$-n = \frac{\log 0.561461428}{\log 1.16}$$

$$-n = \frac{-0.250680074}{0.064457989}$$

$$n = 3.89$$
$$n = 3 \text{ años, 10 meses y 20 días}$$

Todo este procedimiento lo podemos expresar mediante la siguiente fórmula:

$$n = \frac{\log \sum S - \log \sum P}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log 21{,}000 - \log 11{,}79069}{\log 1.16}$$

$$n = \frac{4.322219295 - 4.071539221}{0.064457989}$$

$$n = \frac{0.250680074}{0.064457989}$$

$$n = 3.89$$

$$n = 3 \text{ años, 10 meses y 20 días}$$

3.9 Listado de Fórmulas

Fórmula	Factor	Obtiene

$D = Vn\left[1-\frac{1}{(1+d)^n}\right]$		Descuento Racional
$Vn = D\left[\frac{(1+d)^n}{(1+d)^n-1}\right]$ $Vn = Ve\,(1+d)^n$		Valor nominal - Racional
$Ve = Vn\left[\frac{1}{(1+d)^n}\right]$		Valor efectivo - Racional
$D = Vn\,[1-(1-d\ \ )\ \ ]$		Descuento Bancario
$VL = Vn\,(1-d)^n$		Valor líquido
$Vn = D\left[\frac{1}{1-(1-d)^n}\right]$		Valor nominal en base al descuento bancario
$Vn = VL\left[\frac{1}{(1-d)^n}\right]$		Valor nominal en base al valor líquido
$n = \frac{\log\sum S-\log\sum P}{\log(1+i)}$		Vencimiento medio de deudas

3.10 Problemas propuestos

1. Un pagaré, cuyo valor nominal es de S/. 18,000 y que vence dentro de 5 años, ha sido descontado al 4% de descuento compuesto trimestral. ¿Cuál es el valor del descuento racional?

2. Un documento de crédito, cuyo valor nominal es de S/. 4,500 y que fuera girado a 4 años de vencimiento, fue descontado inmediatamente a una tasa de descuento racional del 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el valor efectivo del documento?

3. ¿Cuál será el valor líquido de una letra de cambio que fue girado por S/. 7,000, si se le descuenta 10 meses antes de su vencimiento, al tipo de descuento al 2% mensual?

4. Calcular el descuento bancario de un pagaré, cuyo valor nominal es de S/7,500, descontado 180 días antes de su vencimiento, a una tasa efectiva mensual del 2.5%

5. ¿Cuál será el valor nominal de un documento de crédito, descontado un año y seis meses antes de su vencimiento al 14% de descuento racional anual, generando un valor efectivo de S/. 6,200?

6. Calcular el valor nominal de una letra sometida a descuento bancario a una tasa del 24% anual con capitalización mensual, faltando tres meses para su vencimiento, si el valor líquido es de S/. 6,200

7. Una empresa desea disponer de un valor líquido de S/.6000, para el efecto debe someter a descuento una letra a una tasa efectiva trimestral del 5% en un período de año y medio. ¿Cuál deberá ser el valor del documento?.

8. Un deudor tiene a su cargo los siguientes pagarés S/.20,000 a 3 meses de plazo, S/.50,000 a 5 meses de plazo, S/.40,000 a un año de plazo y S/.50,000 exigibles de inmediato. Si con su acreedor se ponen de acuerdo liquidar las deudas de la manera siguiente: S/.30,000 de inmediato y el saldo a 6 meses de plazo, calcular el valor del saldo a pagar dentro de 6 meses al 24% de interés compuesto anual capitalizable mensualmente.

9. Con los datos del ejercicio anterior calcular el valor de liquidación con un sólo pago, si se acuerda cancelar todas las deudas inmediatamente.

10. Calcular el vencimiento medio de las siguientes obligaciones S/.15,000, S/.26,000 y S/.10,000 con vencimientos a 2, 4, y 6 años respectivamente a la tasa de interés del 16% anual con capitalización trimestral.

C A P Í T U L O IV

4. ANUALIDADES

En el campo de las finanzas, se presentan diversas modalidades o formas de pago de una deuda, de acuerdo a la naturaleza de la misma. Cuando usamos el término ***anualidad***, nos da la impresión que los pagos son anuales pero en un sentido más amplio, significa una serie de pagos iguales en periodos de tiempo también iguales, que no necesariamente tienen que ser años sino que pueden ser semestres, trimestres o de series de tiempo de cualquier otra duración.

Si los pagos son diferentes o algunos de ellos son diferentes a los demás, la anualidad toma según el caso, los nombres de anualidades variables o anualidades impropias.

4.1 Clasificación de las Anualidades

En términos generales, todas las anualidades están inmersas en dos clases, anualidades ciertas y anualidades eventuales o contingentes, de conformidad con los factores que intervienen en ellas, como el tiempo y la forma de pago.

a. Anualidades Ciertas
   Son aquellas cuyas fechas de inicio y término se conocen por estar estipuladas en forma específica.

b. Anualidades eventuales o contingentes
   Son aquellas en las que el comienzo o el final del plazo no se conoce específicamente, por que dependen de algún suceso previsible, pero que no se puede establecer concretamente; un ejemplo típico es el seguro de vida, en el cual se conoce la cuota pero no el período de duración.

Las anualidades ciertas y eventuales pueden ser a su vez:

a. Ordinarias o vencidas: cuando los pagos se efectúan al final de cada período
b. Anticipadas o impositivas: Cuando los pagos se ejecutan al inicio de cada período.
c. Diferidas: Cuando los pagos inician después de un determinado número de períodos, plazo en el cual el capital se va capitalizando y pueden ser a su vez ordinarias o anticipadas.
d. Anualidades perpetuas: Cuando tienen una fecha de inicio y no tienen fecha final, de manera que, los pagos se prolongan indefinidamente.

A su vez, todas las anualidades mencionadas se subdividen en:

a. Simples: Cuando el período de pago coincide con el período de capitalización
b. Generales: Cuando los periodos de pago no coinciden con el de capitalización. Pudiendo presentarse varios períodos de capitalización por período de pago o varios periodos de pago por período de capitalización
c. Impropias o variables: Cuando las cuotas de pago no son iguales.

4.2 Monto de una Anualidad Simple Ordinaria

Con el propósito de simplificar el análisis del tema de las anualidades empezamos con las anualidades simples; es decir cuando coinciden los períodos de pago con los períodos de capitalización.

Los símbolos que utilizaremos para el tema de las anualidades son:

S = monto de una anualidad o valor futuro.
R = pago periódico de una anualidad
n = numero de periodos de pago.
m = número de capitalizaciones al año
i = tasa de interés nominal anual.
P = Valor actual o presente de una anualidad

Para el cálculo del monto o valor futuro de una anualidad ordinaria, deducimos la fórmula de la siguiente manera:

Para deducir la formula, partimos de un problema supuesto como el siguiente:
Dado una serie de pagos iguales **R**, al final de cada periodo ¿cual será el monto acumulado en **n** periodos de tiempo a una tasa de interés **i** ?.

Ilustraremos el problema planteado utilizando la escala de tiempo.

Fig. 4.1

Del gráfico se deduce que S, será la suma de los montos de cada uno de los pagos en forma individual ya que los periodos de tiempo son diferentes para cada uno, lo que se puede expresar mediante la ecuación.

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots + R(1+i)^{2} + R(1+i) + R$$

El último término no genera intereses debido a que coincide con el final del horizonte temporal.

Si a ambos miembros de la ecuación anterior lo multiplicamos por (1+i), la igualdad se mantiene:

$$S(1+i) = R(1+i)^{n} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} \ldots\ldots + R(1+i)^{3} + R(1+i)^{2} + R(1+i)$$

Luego restando la primera ecuación de la segunda tenemos:

$$S\,(1+i) - S = R\,(1+i)^{n} - R$$

$$S\,(1+i) - 1 = R\,(1+i)^{n} - 1$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{(1+i) \;\; - 1}\right]$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{1+i-1}\right]$$

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right]$$

El factor encerrado entre corchetes se llama factor de capitalización de una serie, que simbólicamente lo presentamos como FSC, que para hallar el monto S de una serie de pagos iguales lo multiplicamos por la serie R. De modo que la fórmula también se representa por:

$$S = R_{i\text{-}n}\,FCS$$

Ejemplo 4.1 Hallar el monto de una serie de cuatro pagos de S/. 56,000 al final de cada año, colocado al 20% anual de interés compuesto con capitalización anual.

Aplicando la fórmula

$$S = 56{,}000\left[\frac{(1+0.20)^{4} - 1}{0.20}\right]$$

$$S = 56{,}000\left[\frac{(1.20)^{4} - 1}{0.20}\right]$$

$$S = 56{,}000\,(5.368)$$

$$S = 300{,}608$$

Cuando los pagos y las capitalizaciones se efectúan en períodos diferentes al período de la tasa nominal, es necesario previamente convertir la tasa nominal en una tasa efectiva por período y luego utilizamos la fórmula normalmente.

Ejemplo 4.2 ¿Cuál será el stock acumulado al cabo de 10 años, mediante pagos a final de cada semestre de S/. 23,500 a la tasa nominal anual del 15% anual con capitalización semestral?

$$S = 23{,}500\left[\frac{(1+0.075)^{20}-1}{0.075}\right]$$

$$S = 23{,}500\ (43.30468134)$$

$$S = 1'017{,}660$$

Ejemplo 4.3 ¿Qué monto se acumulará en una cuenta de ahorros al final de 5 años, si se deposita en forma ordinaria S/ 1.500 trimestrales, por los cuales se percibe una tasa nominal anual del 20% anual con capitalización trimestral?.

$$S = 1{,}500\left[\frac{(1+0.05)^{20}-1}{0.05}\right]$$

$$S = 1{,}500\ (33.0659541)$$

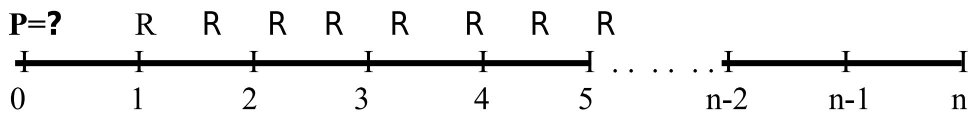
$$S = 49{,}598.93$$

4.3 Valor Presente de Una Anualidad

Consiste en calcular el valor presente P, de una serie uniforme de pagos ordinarios **R**, durante **n** períodos de tiempo y a una tasa de interés compuesto **i.**

Es decir tomar como fecha focal el período cero para el proceso de actualización;. de manera que el valor obtenido, es el equivalente a la suma de todos los pagos actualizados individualmente, gráficamente lo expresamos en la siguiente escala de tiempo.

Fig. 4.2



Para obtener una fórmula que nos permita actualizar una serie de pagos futuros partimos de la fórmula general del monto de una anualidad ordinaria simple.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

El primer miembro de la ecuación está constituido por el monto S y este lo podemos remplazar por su equivalente $P(1+i)^n$ tenemos:

$$P(1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Despejamos P que representa al valor actual y obtenemos la fórmula buscada

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

En esta fórmula, el factor encerrado entre corchetes es el factor de actualización de una serie **FAS**; fórmula que se representa también por la ecuación siguiente:

$$P = R_{i-n}FAS$$

Ejemplos 4.4 Una persona espera recibir ordinariamente durante los próximos 8 años la cantidad de S/. 12,000 nuevos soles anuales, por concepto de dividendos que una empresa lo adeuda; pero nuestro personaje desea negociar actualmente dicha renta al 18% anual de interés compuesto. Determinar a cuanto asciende la cantidad a recibir.

$$P = 12,000\left[\frac{(1+0.18)^8 - 1}{0.18(1+0.18)^8}\right]$$

$$P = 12,000\left(\frac{2.758859203}{0.676594656}\right)$$

$$P = 12,000\ (4.07756576)$$

$$P = 48,930.79$$

Cuando la tasa referencial está dada en términos de tasa nominal, procedemos igual que en el caso del monto.

Ejemplo 4.5 Calcular el valor presente de una serie de pagos de S/. 5,000 cada uno, efectuados ordinariamente y en forma semestral durante 7 años y 6 meses al 16% anual con capitalización semestral.

$$P = 5,000\left[\frac{(1+0.08)^{15} - 1}{0.08(1+0.08)^{15}}\right]$$

$$P = 5,000\left[\frac{2.172169114}{0.253773529}\right]$$

$$P = 5,000\ (8.559478692)$$

$$P = 42,797.39$$

4.4. Cálculo del Valor de las Rentas en una Anualidad

Es frecuente la necesidad de conocer el valor de la serie de pagos periódicos **R**, necesarios para formar un monto **S** en el futuro o para recuperar un capital o valor presente **P** en el período cero, a un determinado período de tiempo ***n*** y una tasa de interés ***i.***

4.4.1 Renta Ordinaria en Función del Monto

Consiste en determinar el valor de la renta periódica **R**, para en un determinado tiempo **n** disponer de un monto o valor futuro **S,** a una tasa de interés **i.**

En este caso, se hace uso del factor depósito fondo de amortización **FDFA,** que se obtiene invirtiendo la estructura del factor de capitalización de una serie **FCS**, de la siguiente manera:

Partiendo de la fórmula del monto de una anualidad ordinaria.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

Despejamos R y obtenemos la fórmula

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

El factor entre corchetes es el factor depósito fondo de amortización FDFDA, de manera que lo representamos también:

$$R = S\ {}_{i-n}\text{FDFA}$$

La fórmula obtenida nos permite calcular el valor de la cuota o renta ordinaria cuando se conoce el monto, la tasa de interés y el tiempo.

Ejemplo 4.6 Se desea saber el valor de la cuota, para acumular S/. 27.000 en 8 entregas ordinarias anuales, capitalizable anualmente al 25% de interés anual.

$$R = 27{,}000\left[\frac{0.25}{(1+0.25)^8 - 1}\right]$$

$$R = 27{,}000\ (0.050398506)$$

$$R = 1360.76$$

Ejemplo 4.7 Se desea saber cuál será el valor de la cuota ordinaria semestral para acumular la cantidad de S/.1’017,660, en un período de 10 años a una tasa de interés compuesto del 15% anual con capitalización semestral.

$$R = 1'017{,}660 \left[\frac{0.075}{(1+0.075)^{20}-1} \right]$$

$$R = 1'017{,}660 \left(\frac{0.075}{3.2478511} \right)$$

$$R = 23{,}500$$

Ejemplo 4.8 Una empresa programa la compra de una máquina dentro de 5 meses, estimándose el precio del equipo en S/. 10,000. ¿Cuál será el ahorro ordinario mensual necesario, en un banco que paga una tasa efectiva mensual del 2% para disponer del mencionado monto al vencimiento de dicho plazo.

$$R = 10{,}000 \left[\frac{0.02}{(1+0.02)^{5}-1} \right]$$

$$R = 10{,}000 \left(\frac{0.02}{0.104080803} \right)$$

$$R = 1921.58$$

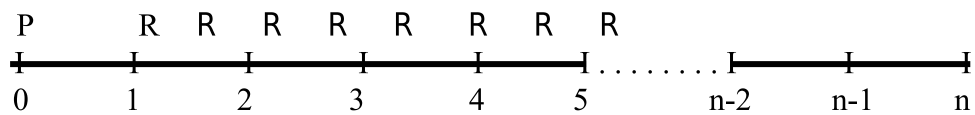
4.4.2 Renta Ordinaria en Función del Valor Actual

Cuando se dispone de un valor actual o presente y se desea calcular el valor de la serie uniforme de pagos periódicos **R**, que permita recuperar una inversión, liquidar un préstamo, etc., dado un determinado período de tiempo ***n*** y una tasa de interés ***i,*** se hace uso del Factor de Recuperación de Capital, **FRC.**

Lo manifestado lo ilustramos mediante la escala de tiempo.

Dado P encontrar R =?

Fig. 4.3



Para resolver el problema, utilizamos el Factor de Recuperación de Capital **FRC**, que multiplicado por el valor presente, obtenemos el valor de la serie **R.**

El Factor de Recuperación de Capital **FRC** se obtiene invirtiendo el Factor de Actualización de una Serie **FAS**.

De manera que para determinar la fórmula que nos permita calcula el valor de la serie **R,** partimos de la fórmula del Valor Actual de una serie uniforme de pagos.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Despejamos R y obtenemos:

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

El factor entre corchetes es el Factor de Recuperación de Capital **FRC,** que nos permite transformar un valor actual **P** en una serie uniforme de pagos **R** equivalentes, a través del horizonte temporal.

Otra forma de expresar la fórmula:

$$R = P_{\, i-n}\, FRC$$

Ejemplo 4.9 Supongamos que usted, obtiene un préstamo de S/. 10,000 al 16% de interés compuesto anual para ser devuelto en 10 pagos al final de cada año. ¿Cuanto deberá abonar en cada pago?

$$R = 10{,}000\left[\frac{0.16i(1+0.16)^{10}}{(1+0.16)^{10} - 1}\right]$$

$$R = 10{,}000\left(\frac{0.705829612}{3.411435079}\right)$$

$$R = 10{,}000(0.206901083)$$

$$R = 2{,}069$$

Ejemplo 4.10 ¿Cuál será la cuota constante a pagar por un préstamo bancario de S/. 8,000, reembolsable con cuotas ordinarias trimestrales durante 2 años, si el cobra una tasa nominal mensual del 2% con capitalización trimestral?

$$R = 8{,}000\left[\frac{0.06i(1+0.06)^8}{(1+0.06)^8 - 1}\right]$$

$$R = 8{,}000\left(\frac{0.095630884}{0.593848074}\right)$$

$$R = 8{,}000(0.161035942)$$

$$R = 1{,}288.299$$

4.5 Cálculo del Tiempo en una Anualidad

Consiste en determinar el plazo o periodo de colocación de una serie uniforme de pagos y para el efecto se pueden utilizar diferentes criterios, de acuerdo al tipo de problema y a la información de la que se disponga. En este caso presentamos los siguientes:

a. Cuando se conoce el monto de una anualidad ordinaria **S**, la tasa de interés **y el** valor de la serie **R.**

b. Cuando se conoce el valor actual **P** de una serie da pagos futuros, el valor de **R** y la tasa de interés **i**.

4.5.1 Cálculo del Tiempo en Función del Monto

Despejamos **n** a partir de la fórmula del monto

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] = \frac{S}{R}$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{Si}{R}$$

$$(1+i)^n = \frac{Si}{R} + 1$$

$$(1+i)^n = \frac{Si + R}{R}$$

$$n \log(1+i) = \log(S + R) - \log R$$

$$n = \frac{\log(Si + R) - \log R}{\log(1+i)}$$

Ejemplo 4.11 ¿Cuántos depósitos ordinarios trimestrales de S/.1,600 deberán hacerse para acumular un monto de S/.14,742.76, al 16% anual con capitalización trimestral?.

$$n = \frac{\log(14{,}742.76x0.04 + 1{,}600) - \log 1{,}600}{\log(1 + 0.04)}$$

$$n = \frac{\log 2{,}189.71 - \log 1{,}600}{\log(1.04)}$$

$$n = \frac{3.340386681 - 3.204119983}{0.017033339}$$

$$n = 8 \quad \text{depósitos trimestrales}$$

4.5.2 Cálculo del Tiempo en Función del Valor Actual

Cuando se desea calcular el período que nos permita recuperar una inversión, liquidar una deuda o cualquier cantidad actual, la fórmula lo deducimos a partir de la fórmula del valor actual de una anualidad ordinaria.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Despejando **n**

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] = \frac{P}{R}$$

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right] = \frac{Pi}{R}$$

$$1 - \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{Pi}{R}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = 1 - \frac{Pi}{R}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{R - Pi}{R}$$

$$(1+I)^n = \frac{R}{R - Pi}$$

$$n \log (1+I) = \log R - \log (R - Pi)$$

$$n = \frac{\log R - \log(R - Pi)}{\log(1+i)}$$

Ejemplo 4.12 ¿Cuántos pagos semestrales de S/.600 deberán hacerse para cancelar una deuda de S/.4,500 al 7% anual con capitalización semestral?.

$$n = \frac{Log 600 - \log(600 - 4{,}500 x 0.035)}{\log(1 + 0.035)}$$

$$n = \frac{Log 600 - \log 442.5}{\log(1.035)}$$

$$n = \frac{2.77815125 - 2.645913275}{0.014940349}$$

$$n = \frac{0.132237975}{0.014940349}$$

$$n = 8.86$$

Aproximadamente 9 pagos semestrales

4.6 Cálculo de la Tasa de Interés de una Anualidad

Algebraicamente no es posible calcular la tasa de interés de una anualidad, por la estructura de la fórmula, de manera que se puede calcular de dos formas, la primera con el uso de la tabla financiera, encontrándose el valor del factor calculado directamente en la tabla a una determinada tasa y de no encontrarse, el cálculo de la tasa se realiza por medio de la interpolación.

Ejemplo 4.13 Una persona deposita ordinariamente S/.2, 100 anuales durante 4 años. ¿A que tasa de interés anual se capitalizará para formar un monto de S/.10, 000?

Para solucionar el problema planteamos la ecuación de equivalencia y calculamos el factor de capitalización de una serie en 4 períodos de tiempo y a una tasa de interés desconocida i.

$$S = R_{i-n}.FCS$$

$$10{,}000 = 2{,}100_{i-4}.FCS$$

$$FCS = \frac{10{,}000}{2{,}100}$$

$$FCS = 4.7619$$

Al resultado se le conoce con el nombre de factor calculado FC, que buscando en la tabla para n = 4, el factor se encuentra entre el 10% y 12% de interés, con los valores de 4.6410 y 4.7793 respectivamente; por consiguiente determinamos la tasa de interés interpolando con la expresión siguiente:

$$i = 10 + 2\left(\frac{FC - Fm}{FM - Fm}\right)$$ FC = Factor calculado

$$i = 10 + 2\left(\frac{4.7619 - 4.6410}{4.7793 - 4.6410}\right)$$ FM = Factor encontrado mayor

$$i = 10 + 2\,(0.87419)$$ Fm = actor encontrado menor

$$i = 11.75\ \%$$

La tasa obtenida es aproximada dada a que por las características del cálculo incluye un margen de error.

Otra forma de calcular la tasa aproximada cuando se conocen P, S, R y n, excepto la tasa efectiva periódica, se plantea la ecuación de equivalencia con los datos disponibles, y se determina por método del tanteo; buscando por aproximaciones sucesivas uno menor y otro mayor al valor buscado, con los cuales lo obtenemos por interpolación lineal.

Consideramos necesario puntualizar que en estos métodos están implícitos los errores por lo cual se deben hacer las comprobaciones necesarias a fin de determinar con mayor precisión los valores buscados.

Con los datos de ejercicio anterior aplicamos el método mencionado.

Ejemplo 4.14 Una persona deposita ordinariamente S/.2, 100 anuales durante 4 años. ¿A que tasa de interés anual se capitalizará para formar un monto de S/.10, 000?

La ecuación de equivalencia es:

$$2{,}100\left[\frac{(1+i)^4 - 1}{i}\right] = 10{,}000$$

Por tanteo probamos con una tasa del 11%

$$2{,}100\left[\frac{(1+0.11)^4 - 1}{0.11}\right] = 9{,}890.44$$

El resultado es un monto menor, en consecuencia aumentamos la tasa al 12%

$$2{,}100\left[\frac{(1+0.12)^4 - 1}{0.12}\right] = 10{,}036.59$$

con el 12% nos arroja un monto mayor de manera que con los datos obtenidos podemos interpolar

$$i = 11 + 1\left(\frac{SD - Sm}{SM - Sm}\right)$$

SM = Monto Mayor
SD = Monto dado
Sm = Monto menor

$$i = 11 + 1\left(\frac{10{,}000.00 - 9{,}890.44}{10{,}036.59 - 9{,}890.44}\right)$$

$$i = 11 + 0.7496$$

$$i = 11.75$$

4.7. **Listado de Fórmulas**

Fórmula	**Factor**	**Obtiene**
$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	FCS	Monto de una anualidad simple ordinaria
$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$	FAS	Valor actual de una anualidad simple ordinaria
$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$	FDFA	Renta uniforme ordinaria en función del monto
$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$	FRC	Renta uniforme ordinaria en función del valor actual

n = $\dfrac{Log(Si+R)-\log R}{\log(1+i)}$	NPER	Número de períodos de una anualidad simple ordinaria en función al monto
n = $\dfrac{\log R-\log(R-Pi)}{\log(1+i)}$	NPER	Número de períodos de una anualidad simple ordinaria en función al valor actual

4.8 Problemas propuestos

1 Un trabajador aporta a una AFP una cuota fija de S/.400 mensuales ordinariamente por espacio de 5 años. ¿Cuánto habrá acumulado si el fondo percibe una tasa efectiva mensual del 1.2%?

2 Un ahorrista efectúa depósitos vencidos mensuales de S/.250 en un banco que paga una tasa trimestral del 4.5% con capitalización mensual. ¿Cuál será el valor acumulado al término de 2 años y 4 meses?

3 Un comerciante viene pagando una deuda con cuotas ordinarias trimestrales de S/.900 y propone liquidarlas ahora las ultimas 6 cuotas que le quedan y pregunta : ¿Cuánto tiene que pagar ahora, si la tasa efectiva anual es del 16%?

4 Calcular el valor presente de una serie de depósitos de S/.500 nuevos soles mensuales, durante 3 años, a la tasa del 2% mensual.

5 Cuanto deberá depositarse trimestralmente en una cuenta de ahorros, que paga el 16% anual convertible trimestralmente, durante los próximos 3 años para comprar un automóvil por el valor de $ 12,000 al tipo de cambio del S/.3.50

6 Calcular el valor del depósito uniforme semestral vencido para formar un valor futuro de S/.5,860 en un período de 4 años y medio, si los depósitos perciben una tasa efectiva mensual de 1.5%.

7 Un préstamo de S/.6,000, debe cancelarse en un plazo de un año, con cuotas ordinarias mensuales al 18% anual capitalizable mensualmente, calcular el valor de cada cuota.

8 ¿Cuántos depósitos de fin de semestre de S/.23,500 serán necesarios para acumular un monto de S/.1'017,660, en un banco que paga el 15% anual con capitalización semestral?

9 ¿Cuantas cuotas ordinarias trimestrales de S/.1,650 serán necesarias para cancelar un préstamos de S/.8,114, al 24% anual con capitalización trimestral

10 Una persona deposita ordinariamente S/.200 mensuales durante 14 meses. ¿A que tasa de interés mensual se capitalizarán para formar un monto de S/.4, 200?

C A P Í T U L O V

5. ANUALIDADES ANTICIPADAS

En el campo de los negocios es frecuente que los pagos periódicos se efectúen al comienzo de cada período; tal es el caso de los alquileres de terrenos, edificios, oficinas, pago de pensiones de enseñanza, etc. que por lo general se pagan por adelantado.

Una anualidad anticipada, es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen a principio de cada período; y se le conoce también con el nombre de anualidad adelantada, de principio de período o de imposición.

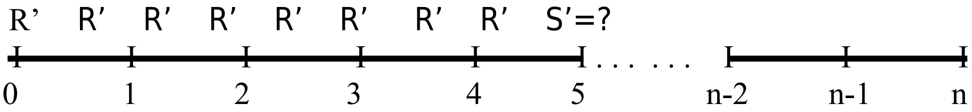
Las anualidades anticipadas por empezar en el período 0 y terminar al inicio del último período todas las rentas perciben intereses, hasta el término del horizonte temporal. En cambio en la anualidad vencida la última renta no percibe intereses por coincidir con el final del plazo.

5.1 Monto de una Anualidad Simple Anticipada

De lo antes manifestado, el monto de una serie uniforme de pagos anticipados, es igual al monto de una serie uniforme de pagos ordinarios capitalizado por un periodo más, que constituye el último período del horizonte temporal de la anualidad, a la tasa de interés estipulada.

La definición que antecede lo podemos ilustrar en una escala de tiempo

Fig. 5.1



De la gráfica deducimos que el monto de las anualidades anticipadas **S’**, será igual a la suma de cada una de las anualidades con sus respectivos intereses, calculados independientemente.

La simbología que utilizaremos para este tema, será la misma que la usada en las anualidades ordinarias y para diferenciar la anualidad anticipada de la vencida usaremos S prima para el monto, P prima para el valor actual y R prima para la renta.
Interpretando la escala de tiempo deducimos la fórmula:.

1. $S' = R'(1+i)^{n} + R'(1+i)^{n-1} + R'(1+i)^{n-2} + ...+ R'(1+i)^{2} + R'(1+i)$

Multiplicando ambos miembros por (1+i)

2. $S'(1+i) = R'(1+i)^{n+1} + R'(1+i)^{n} + R'(1+i)^{n-1} + ...+ R'(1+i)^{2} + R'(1+i)$

Luego restamos la ecuación 1 de la ecuación 2 y tenemos:

$$S'(1+i) - S' = R'(1+i)^{n+1} - R'(1+i)$$

Factorizando ambos miembros

$$S'[(1+i) - 1] = R'(1+i)[(1+i)^{n} - 1]$$

Despejando S’

$$S' = R'\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right](1+i)$$

La formula constituye una ecuación de equivalencia financiera, tomando como fecha focal el final del horizonte temporal, que nos permitirá calcular el monto de una anualidad anticipada.

El factor encerrado entre corchetes es el factor de capitalización de una serie **FCS** en **n** períodos y el factor encerrado entre paréntesis es el factor simple de capitalización **FSC** en un período.

$$S' = R'_{i-n}\, FCS_{i-1.}\, FSC$$

La ecuación indica que el monto de una anualidad anticipada se obtiene multiplicando la renta anticipada por el factor de capitalización de una serie a una tasa de interés **i** en **n** períodos de tiempo y a su vez multiplicad por el factor simple de capitalización a una tasa de interés **i** en un período de tiempo.

Ejemplos 5.1 Una compañía deposita a principio de cada año S/.20, 000 en una cuenta de ahorros que paga el 12% de interés compuesto anual. ¿A cuánto ascenderá los depósitos al cabo de 5 años?

$$S' = 20{,}000\left[\frac{(1+0.12)^5-1}{0.12}\right](1+0.12)$$

$$S' = 20{,}000\left[\frac{(1.12)^5-1}{0.12}\right](1.12)$$

$$S' = 20{,}000(7.115189043)$$

$$S' = 142{,}303.78$$

Ejemplo 5.2 ¿Cual será el monto de una serie uniforme de pagos de S/2,000 al inicio de cada semestre durante 3 años a la tasa nominal del 16% anual con capitalización semestral?.

Aplicando la segunda formula:

$$S' = 2{,}000\left[\frac{(1+0.08)^6-1}{0.08}\right](1+0.08)$$

$$S' = 2{,}000\left[\frac{(1.08)^6-1}{0.08}\right](1.08)$$

$$S' = 2{,}000\ (7.922803359744)$$

$$S' = 15{,}845.60$$

Ejemplo 5.3 ¿Qué monto se acumulará al término de seis meses si hoy depositamos en una cuenta de ahorros la cantidad de S/ 800 y se continúa depositando por cinco meses consecutivos a una tasa de interés nominal anual del 24% anual con capitalización mensual?

$$S' = 800\left[\frac{(1+0.02)^6-1}{0.02}\right](1+0.02)$$

$$S' = 800\left[\frac{(1.02)^6 - 1}{0.02}\right](1.02)$$

$$S' = 5,147.43$$

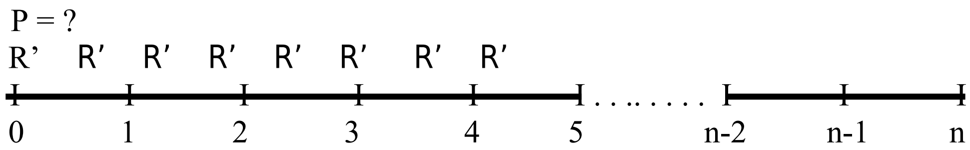
5.2 Valor Actual de una Anualidad Anticipada

Consiste en calcular el valor actual **P**, de una serie uniforme de pagos de inicio de cada período **R'**, durante **n** períodos de tiempo y a una tasa de interés compuesto **i.**

Es decir tomar como fecha focal el período cero para el proceso de actualización;. de manera que el valor obtenido, es el equivalente a la suma de todos los pagos actualizados individualmente.

Gráficamente lo expresamos en la siguiente escala de tiempo:

Fig. 5.2



Para obtener una fórmula que nos permita actualizar una serie de pagos futuros pagaderos a inicio de cada período, partimos de la formula del monto de anualidades anticipadas.

$$S' = R'\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

El primer miembro de la ecuación esta constituido por el monto S' y e este lo podemos remplazar por su equivalente $P'(1+i)^n$ tenemos:

$$P'(1+i)^n = R'\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

Despejamos C que representa al valor actual y obtenemos la fórmula buscada

$$P' = R'\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i)$$

Fórmula que nos permitirá calcular el valor actual de las anualidades anticipadas, cuando la tasa de interés efectiva está dada en un período igual al período se capitalizan.

Cuando el problema esta planteado en términos de tasa nominal, en un plazo diferente al período de capitalización es necesario transformar previamente la tasa nominal en una tasa efectiva por período, para luego aplicar la fórmula.

El factor del segundo miembro encerrado entre corchetes es el factor de actualización de una serie FAS y el factor encerrado entre paréntesis es el factor simple de capitalización FSC, en un periodo, por lo tanto para calcular el valor actual de una anualidad anticipada utilizamos en forma combinada ambos factores.

Ejemplos 5.4 Una empresa pesquera, alquila un edificio para el funcionamiento de sus oficinas administrativas por S/.4, 000 nuevos soles mensuales y propone al propietario pagar el alquiler en forma anual y por adelantado, si la tasa de interés compuesto es del 12% anual con capitalización mensual. ¿Cuánto pagará la empresa anualmente?

$$P' = 4{,}000\left[\frac{(1+01)^{12}-1}{01(1+01)^{12}}\right](1+01)$$

$$P' = 4{,}000\left[\frac{(1.01)^{12}-1}{0.01(1.01)^{12}}\right](1.01)$$

$$P' = 4{,}000\left(\frac{0.12682503}{0.01126825}\right)(1.01)$$

$$P' = 4{,}000\ (11.36762854)$$

$$P' = 45{,}470.51$$

Ejemplos 5.5 El señor Rivera está pagando su vivienda, que compró a plazos con financiamiento bancario a razón de S/. 2,500 por trimestre anticipado. Después de cierto tiempo, cuando aún le quedan por pagar 30 cuotas, decide liquidar la cuenta pendiente, con un sólo pago. ¿Cuál será el valor del pago único si el banco cobra el 24% de interés efectivo anual?

$$TET = \sqrt[4]{1.24}-1$$

$$TET = 0.055250146$$

$$P' = 2{,}500\left[\frac{(1+0.0553)^{30}-1}{0.0553(1+0.05531)^{30}}\right](1+0.0553)$$

$$P' = 2{,}500\left[\frac{(1.0553)^{30}-1}{0.0553(1.0553)^{30}}\right](1.0553)$$

$$P' = 38{,}216.94$$

5.3 Valor de la Renta Anticipadas

Al igual que en las anualidades ordinarias, es frecuente la necesidad de conocer el valor de los pagos periódicos **R**, necesarios para formar un monto en el futuro o para recuperar un capital actual, dado un determinado período de tiempo **n** y una tasa de interés **i.**

De manera que los casos que se presentan son los mismos que para las anualidades ordinarias.

5.3.1 Renta Anticipada en Función del Monto

Consiste en determinar cuanto se deberá pagar periódicamente y por anticipado para en un determinado período de tiempo disponer de un monto en el futuro a una tasa de interés compuesto.

Deducimos la fórmula a partir del monto de una anualidad anticipada.

$$S = R'\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i)$$

Despejamos R y obtenemos la fórmula:

$$R' = S\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

Los factores entre corchetes son el factor depósito fondo de amortización FDFDA, y el factor simple de actualización respectivamente de manera que lo expresamos también: con las siglas:

$$R' = S_{\,i-n}\,FDFDA_{i-1}FSA$$

Ejemplo 5.6 Hallar el valor de la cuota anticipada que nos permita acumular S/.27.000 en 8 entregas anuales, impuestas al 25% de interés compuesto anual.

$$R' = 27{,}000\left[\frac{0.25}{(1+0.25)^8-1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.25)}\right]$$

$$R' = 27,000\ (0.050398506)\ (0.8)$$

$$R' = 1,088.61$$

:

Ejemplo 5.7 Se desea saber cuál será el valor de la cuota anticipada semestral, para acumular la cantidad de S/.1'017,660, en un período de 10 años a una tasa de interés compuesto del 15% anual con capitalización semestral.

$$R' = 1'017,660 \left[\frac{0.075}{(1+0.075)^{20}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.075)}\right]$$

$$R' = 1'017,660 \left(\frac{0.075}{3.2478511}\right)(0.930232558)$$

$$R' = 21,860.46$$

Ejemplo 5.8 Calcular el importe del la renta mensual anticipada que al cabo de un año y cuatro meses se acumule S/. 15,000, capitalizado a una tasa efectiva mensual del 2%.

$$R' = 15,000 \left[\frac{0.02}{(1+0.02)^{16}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.02)}\right]$$

$$R' = 15,000 \left(\frac{0.02}{0.372785705}\right)(0.980392156)$$

$$R' = 788.97$$

5.3.2 Renta Anticipada en Función del Valor Actual

Consiste en determinar el valor de una serie futura de pagos anticipados que nos permita recuperar una cantidad actual **P** en **n** periodos de tiempo a una tasa de interés compuesto **i**.

Es decir, se conoce el valor actual **P**, el tiempo **n** y la tasa de interés **i**, y lo que se quiere calcular es la serie **R'**, que nos permita recuperar un depósito, una inversión, liquidar un préstamo o cualquier tipo de colocación financiera efectuado en el momento actual.

Para determinar la fórmula que nos permita calcula el valor de la serie anticipada **R’,** partimos de la fórmula del valor actual de una serie uniforme de pagos anticipados.

$$P = R' \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right](1+i)$$

Despejamos R’ y obtenemos:

$$R' = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]\left[\frac{1}{(1+i)} \right]$$

Los factores entre corchetes, son el Factor de Recuperación de Capital **FRC** y el factor simple de actualización **FSA** respectivamente, que nos permite calcular el valor de la serie **R’**.

Ejemplo 5.9 Supongamos que usted, obtiene un préstamo de S/. 10,000 al 16% de interés compuesto anual para ser devuelto en 10 pagos al principio de cada año. ¿Cuanto deberá abonar en cada pago?

$$R' = 10{,}000 \left[\frac{0.16i(1+0.16)^{10}}{(1+0.16)^{10} - 1} \right]\left[\frac{1}{(1+0.16)} \right]$$

$$R' = 10{,}000\left(\frac{0.705829612}{3.411435079} \right)0.862068965)$$

R’ = 10,000(0.206901083)

R’ = 1,783.63

Ejemplo 5.10 Una empresa obtiene un préstamo de S/. 850,000 y desea saber el valor de la cuota anticipada trimestral que le permita liquidar dicho préstamo en 5 años, si la tasa de interés es del 22% anual con capitalización trimestral.

$$R' = 850{,}000 \left[\frac{0.055(1+0.055)^{20}}{(1+0.055)^{20} - 1} \right]\left[\frac{1}{(1+0.055)} \right]$$

$$R' = 850{,}000 \left(\frac{0.160476662}{1.917757491} \right)0.947867298)$$

R’ = 850,000 (0.0793169)

R’ = 67,419.36

Ejemplo 5.11 ¿Cual será el valor del pago mensual anticipado para cancelar una deuda de S/. 18,000, embólsale en el período de un año, afectado por una tasa efectiva mensual del 2%?. Calcular además el préstamo neto recibido.

$$R' = 18{,}000\left[\frac{0.02(1+0.02)^{12}}{(1+0.02)^{12}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.02)}\right]$$

$$R' = 18{,}000\left(\frac{0.025364835}{0.268241795}\right)0.980392156)$$

$$R' = 850{,}000\ (0.0793169)$$

$$R' = 1{,}668.70$$

El valor neto del préstamo esta dado por el préstamo bruto menos la primera cuota.

Préstamo neto = 18,000 - 1,668.70
Préstamo neto = 16,331.30

5.4 Cálculo del Tiempo en una Anualidad Anticipada

Consiste en determinar el plazo o período de colocación de una serie uniforme de pagos anticipados, utilizando criterios similares al de las anualidades ordinarias determinamos el valor de **n**, de acuerdo al tipo de problema y a la información de la que se disponga.

a. Cálculo de **n** en función del monto de una anualidad anticipada **S'**, dada la tasa de interés y el valor de la serie anticipada **R'.**

b. Cálculo de **n** en función del valor actual **P'** de una serie da pagos futuros anticipados, dado el valor de **R'** y la tasa de interés **i**.

5.4.1 Cálculo del Tiempo en Función del Monto

Despejamos **n** a partir de la fórmula del monto

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i)$$

$$\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right](1+i) = \frac{S}{R}$$

$$(1+i)^n-1 = \frac{Si}{R(1+i)}$$

$$(1+i)^n = \frac{Si}{R(1+i)} + 1$$

$$(1+i)^n = \frac{Si + R(1+i)}{R(1+i)}$$

$$n \log(1+i) = \log\left[Si + R(1+i)\right] - \log R(1+i)$$

$$n = \frac{\log\left[Si + R(1+i)\right] - \log R(1+i)}{\log(1+i)}$$

Ejemplo 5.12 ¿Cuántos depósitos Anticipados mensuales de S/.1, 200 será necesario hacer para acumular un monto de S/.24,956.06, a una tasas efectiva mensual del 1.5%?

$$n = \frac{\log\left[24{,}956.06x0.015 + 1{,}200(1+0.05)\right] - \log 1{,}200(1+0.015)}{\log(1+0.015)}$$

$$n = \frac{\log 1{,}592.34 - \log 1{,}218}{\log(1.015)}$$

$$n = \frac{3.202035805 - 3.085647288}{0.006466042}$$

n = 18 depósitos mensuales

5.4.2 Cálculo del Tiempo en Función del Valor Actual

Cuando se desea calcular el período que nos permita recuperar una inversión, liquidar una deuda o cualquier cantidad actual, la fórmula lo deducimos a partir de la fórmula del valor actual de una anualidad anticipada.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i)$$

Despejando **n**

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i) = \frac{P}{R}$$

$$\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right] = \frac{Pi}{R(1+i)}$$

$$1 - \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{Pi}{R(1+i)}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = 1 - \frac{Pi}{R(1+i)}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{R(1+i) - Pi}{R(1+i)}$$

$$(1+I)^n = \frac{R(1+i)}{R(1+i) - Pi}$$

$$n \log (1+I) = \log R(1+i) - \log[R(1+i) - Pi]$$

$$n = \frac{\log R(1+i) - \log[R(1+i) - Pi]}{\log(1+i)}$$

Ejemplo 5.13 ¿Cuántos pagos semestrales de S/.600 deberán hacerse para cancelar una deuda de S/.4,500 al 7% anual con capitalización semestral?.

$$n = \frac{\log 600(1.035) - \log[600(1.035) - 4{,}500x0.035]}{\log(1.035)}$$

$$n = \frac{Log 621 - \log(621 - 157.50)}{\log(1 + 0.035)}$$

$$n = \frac{Log 621 - \log 463.50.50}{\log(1.035)}$$

$$n = \frac{2.79309160 - 2.66604974}{0.014940349}$$

$$n = \frac{0.12704186}{0.014940349}$$

n = 8.5 pagos semestrales

5.5 Cálculo de la Tasa de Interés de una Anualidad Anticipada

Hemos visto en el tratamiento de las anualidades ordinarias, que algebraicamente no es posible determinar una fórmula para calcular la tasa de interés de una anualidad. En consecuencia determinamos una tasa aproximada planteando su respectiva ecuación de equivalencia y aplicando la interpolación entre dos valores extremos.

Cuando se conocen P, S, R y n, excepto la tasa efectiva periódica, se plantea la ecuación de equivalencia con los datos disponibles, y se determina por el método del tanteo; buscando por aproximaciones sucesivas uno menor y otro mayor al valor buscado, con los cuales lo obtenemos por interpolación lineal.

Consideramos necesario reiterar que en estos métodos están implícitos los errores por lo cual se deben hacer las comprobaciones necesarias a fin de determinar con mayor precisión los valores buscados.

Ejemplo 5.14 Una persona deposita anticipadamente S/.1, 500 anuales durante 5 años. ¿A que tasa de interés anual se capitalizará para formar un monto de S/.10,800?

La ecuación de equivalencia es:

$$1{,}500\left[\frac{(1+i)^5-1}{i}\right](1+i) \quad = \quad 10{,}800$$

Por tanteo probamos con una tasa del 12%

$$1{,}500\left[\frac{(1+0.12)^5-1}{0.12}\right](1.12) \quad = \quad 10{,}672.78$$

El resultado es un monto menor, en consecuencia aumentamos la tasa al 13%

$$1{,}500\left[\frac{(1+0.13)^5-1}{0.13}\right](1.13) \quad = \quad 10{,}984.06$$

con el 13% nos arroja un monto mayor de manera que con los datos obtenidos interpolamos

SM = Monto Mayor

$$\text{i} \quad = \quad 12 \quad + \quad 1\left(\frac{SD-Sm}{SM-Sm}\right)$$

SD = Monto dado

Sm = Monto menor

$$\text{i} \quad = \quad 12 \quad + \quad 1\left(\frac{10{,}800.00-10{,}672.78}{10{,}984.06-10{,}672.78}\right)$$

$$i = 12 + 1\left(\frac{127.22}{311.28}\right)$$

$$i = 12 + 0.4087$$

$$i = 12.41\ \%$$

5.6. Listado de Fórmulas

Fórmula	Factor	Obtiene
$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$	FCS	Monto de una anualidad simple anticipada
$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right](1+i)$	FAS	Valor actual de una anualidad simple anticipada
$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$	FDFA	Renta anticipada para formar un monto
$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$	FRC	Renta anticipada en función del valor actual
$n = \frac{\log[Si + R(1+i)] - \log R(1+i)}{\log(1+i)}$	NPER	Número de períodos de renta de una anualidad simple anticipada en función del monto
n =	NPER	Número de períodos de renta de una anualidad simple anticipada

$\dfrac{\log R(1+i)-\log[R(1+i)-Pi]}{\log(1+i)}$		en función del valor actual

5.7 Problemas propuestos

1. Un ahorrista deposita a principio de cada trimestre S/.2,000 en una cuenta de ahorros, que paga el 12% anual con capitalización trimestral ¿A cuánto ascenderá el monto al cabo de 5 años?.

2. Calcular el valor futuro de una anualidad anticipada de S/.800 cada bimestre, en un período de 2 años, a la tasa efectiva de interés del 12% anual.

3. Se desea saber el valor de la cuota anticipada mensual, para acumular la cantidad de S/.22,600, en un período de 3 años a una tasa de interés compuesto del 12% anual con capitalización mensual.

4. Un comerciante programa la adquisición de una unidad de transporte dentro de 6 meses, cuyo precio estimado es de S/.18,000. ¿Cuánto deberá ahorrar a inicio de cada mes durante el período, en un banco que paga el 24% anual con capitalización trimestral?

5. Hallar el valor actual de una renta semestral anticipada de S/.1, 500 durante 5 años, en una cuenta de ahorros que paga el 2% mensual con capitalización semestral.

6. Se alquila un ambiente para almacén por un período de 8 meses, con pagos anticipados mensuales de S/400. ¿Cuánto se pagaría al contado a inicio del contrato si la tasa de interés anual es del 18% con capitalización mensual?..

7. Ud. le otorgó un préstamo de S/. 20,000 al 16% de interés compuesto anual con capitalización semestral, para ser devuelto en 10 pagos al principio de cada semestre. ¿Cuanto deberá cobrar en cada pago?

8. Se invierte en un negocio la cantidad de S/.20, 000, estimándose un período de recuperación de 3 años. ¿Cuál deberá ser el rendimiento semestral, si la tasa efectiva trimestral es del 4.5%?

9. ¿Cuantas cuotas anticipadas anuales de S/.4, 500 serán necesarias para cancelar un préstamos de S/.18, 500, a una tasa efectiva trimestral del 5%?

10. Hace 2 años se viene depositando en un banco anticipadamente S/.800 trimestrales y en la fecha se dispone de S/.7, 800. ¿A que tasa efectiva trimestral se capitalizaron los depósitos?

C A P Í T U L O VI

6. ANUALIDADES DIFERIDAS Y RENTAS PERPETUAS

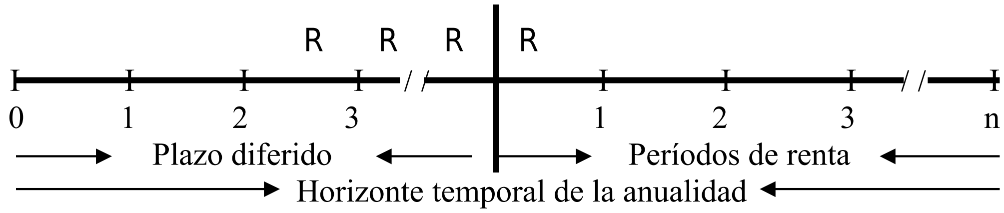
Una anualidad diferida es aquella, que por acuerdo entre las partes contratantes el primer pago se realiza después de transcurrido un cierto número de períodos de iniciad la vigencia de la anualidad. Es decir, que la fecha inicial de la anualidad no coincide con la fecha del primer pago; en estos casos se dice que la anualidad es diferida.

El tiempo transcurrido entre la fecha de inicio de la anualidad y la fecha del primer pago se denomina Intervalo de Aplazamiento, período de gracia o plazo diferido.

Durante el intervalo de aplazamiento, que es el plazo que media entre el inicio de la anualidad y el primer pago, se utiliza como unidad el tiempo que corresponde a un período de renta.

El capital inicial es capitalizado al vencimiento de cada período diferido, para luego distribuirlo entre el número de cuotas pendientes de pago. Por tanto, al vencimiento del intervalo de aplazamiento, una anualidad diferida se convierte en una anualidad vencida o anticipada según el caso.

Fig. 6.1



6.1 Valor del Monto de una anualidad diferida

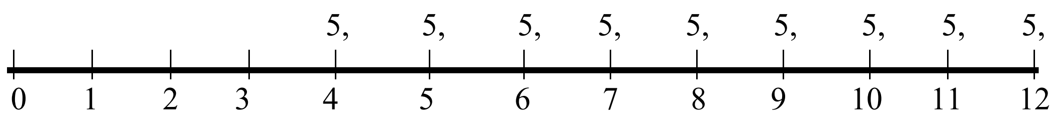
Para el cálculo de los valores de las anualidades diferidas no se requieren nuevas fórmulas, se utilizan según sea el caso las descritas en los capítulos anteriores, correspondientes a anualidades, tanto vencidas como anticipadas.

6.1.1 Monto de una anualidad vencida simple diferida

Ejemplo 6.1 Calcular el valor futuro de una anualidad ordinaria de S/.5,000 cada semestre, si el primer pago debe efectuarse dentro de 2 años y se continúa por espacio de 4 años más, a la tasa de interés compuesto del 12% anual con capitalización semestral.

En este caso se presentan 9 cuotas ordinarias semestrales, de manera que resolvemos el problema, mediante el factor de capitalización de una serie; situación que lo visualizamos en una escala de tiempo.

Fig. 6.3



$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$S = 5{,}000\left[\frac{(1+0.06)^9 - 1}{0.06}\right]$$

$$S = 5{,}000\ (11.49131598)$$

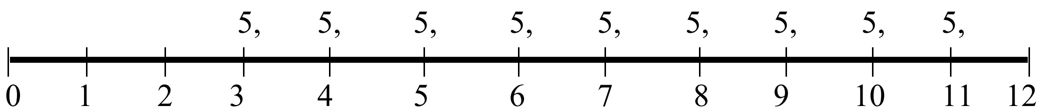
$$S = 57{,}456.58$$

6.1.2 Monto de una anualidad simple anticipada diferida

Ejemplo 6.2 Calcular el valor futuro de una anualidad anticipada de S/.5,000 cada semestre, si el primer pago debe efectuarse dentro de 2 años y se continúa por espacio de 4 años más, a la tasa de interés compuesto del 12% anual con capitalización semestral.

En este caso las cuotas se presentan al inicio de cada período semestral, de manera que resolvemos el problema, mediante el factor de capitalización de una serie y al resultado lo multiplicamos por el factor simple de capitalización por un período; ver la escala de tiempo.

Fig. 6.2



$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

$$S = 5{,}000\left[\frac{(1+0.06)^9 - 1}{0.06}\right](1+0.06)$$

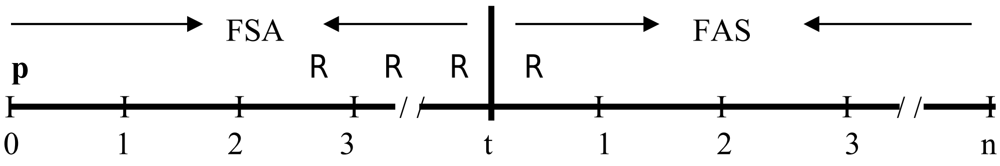
$$S = 5{,}000\ (\ 11.49131598\ )(1.06)$$

$$S = 60{,}903.97$$

6.2 Valor Actual de una anualidad diferida

Conocido el valor futuro de una anualidad diferida, la tasa de interés y el número de períodos determinar el valor actual. Para determinar el valor actual en este tipo de problemas se requiere el uso de dos factores, el factor de actualización de una serie y el factor simple de actualización, dado a que se presentan dos momentos, un período de actualización de una serie y un período de actualización de una sola cantidad. .

Fig. 6.4

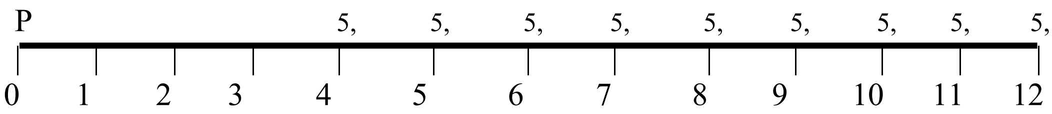


6.2.1 Valor actual de una anualidad ordinaria simple diferida

Ejemplo 6.3 Con los datos del ejemplo anterior (6.1) determinar el valor actual de la anualidad diferida.

Para solucionar el problema utilizamos el factor de actualización de una serie **FAS,** para calcular el valor actual de los nueve pagos, por 4 años y medio equivalente a 9 semestres y el factor simple de actualización **FSA** por un año y medio o 3 semestres, para calcular el valor actual en el período cero.

Fig. 6.5



$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

$$P = 5{,}000\left[\frac{(1+0.06)^9 - 1}{0.06(1+0.06)^9}\right]\left[\frac{1}{(1+0.06)^3}\right]$$

$$P = 5{,}000\left(\frac{0.689478959}{0.101368737}\right)(0.839619283)$$

$$P = 5{,}000\left(\frac{0.689478959}{0.101368737}\right)(0.839619283)$$

$$P = 5{,}000\,(5.710832021)$$

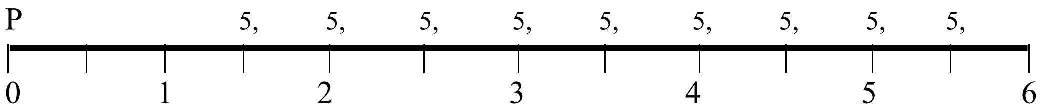
$$P = 28{,}554.16$$

6.2.2 Valor Actual de una anualidad simple anticipada diferida

Ejemplo 6.4 Con los datos del ejemplo anterior (6.1) determinar el valor actual de la anualidad anticipada diferida.

Para solucionar el problema utilizamos el factor de actualización de una serie **FAS,** para calcular el valor actual de los nueve pagos, por 4 años y medio equivalente a 9 semestres y el factor simple de actualización **FSA** por un año equivalente a 2 semestres, para calcular el valor actual en el período cero.

Fig. 6.6



$$P' = R' \left[\frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)^k}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

$$P' = 5{,}000 \left[\frac{(1+0.06)^9 - 1}{0.06(1+0.06)^9}\right]\left[\frac{1}{(1+0.06)^2}\right]$$

$$P' = 5{,}000 \left(\frac{0.689478959}{0.101368737}\right)(0.88999644)$$

$$P' = 5{,}000\ (6.0534819425)$$

$$P' = 30{,}267.41$$

6.3 Valor de la Renta de una anualidad diferida

Consiste en calcular el valor de la serie uniforme de pagos de una anualidad, y al igual que en las anualidades no diferidas se presentan dos casos:

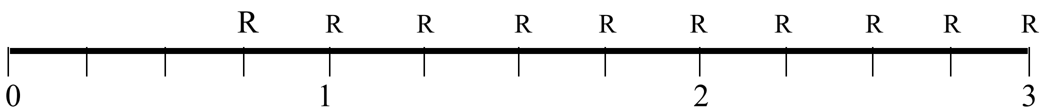
6.3.1 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del monto

Consiste en determinar el valor de cada pago vencido de una anualidad diferida y esto se obtiene con la fórmula de su similar ordinaria y no diferida.

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Ejemplo 6.5 Al término de un horizonte temporal de 3 años se requiere acumular S/.25, 000, con cuotas trimestrales vencidas, cuya primera cuota se efectúa al término del tercer trimestre, en un banco que paga una tasa efectiva trimestral del 4.5%. ¿Cuál será el valor de cada cuota?

Fig. 6.7



$$R = 25{,}000\left[\frac{0.045}{(1+0.045)^{10}-1}\right]$$

$$R = 2{,}034.47$$

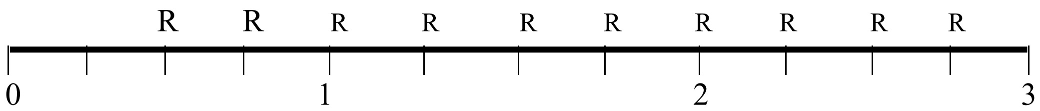
6.3.2 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del monto

Consiste en determinar el valor de cada pago anticipado de una anualidad diferida y esto se obtiene con la fórmula de su similar anticipada y no diferida.

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

Ejemplo 6.6 Con los datos del ejercicio anterior calcular la renta cuando los pagos son anticipados.

Fig. 6.8



$$R = 25{,}000\left[\frac{0.045}{(1+0.045)^{10}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.045)}\right]$$

$$R = 25{,}000\left[\frac{0.045}{(1.045)^{10}-1}\right]\left[\frac{1}{(1.045)}\right]$$

$$R = 1{,}946.86$$

6.3.3 Renta de una anualidad ordinaria diferida en función del Valor Actual

Consiste en calcular la renta uniforme diferida cuando se conoce el valor actual, la tasa de interés y el tiempo de una anualidad, que puede ser ordinaria o anticipada.

Ejemplo 6.7 Un ahorrista deposita S/.60,000 en un banco que paga el 14% de interés anual para que, dentro de 5 años, empiece a recibir una renta semestral ordinaria durante 10 años más, Hallar la renta semestral a recibir.

Para dar solución al problema analizamos los períodos a capitalizar y a recuperar; en consecuencia, es necesario capitalizar el depósito por un espacio de 9 semestres, utilizando el factor simple de capitalización, y por el resto del período utilizaremos el factor de recuperación de capital, es decir por 21 semestres

La fórmula lo deducimos del valor actual de una anualidad diferida ordinaria

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

$$R = P(1+i)^t\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = 60{,}000(1+0.07)^9\left[\frac{0.07(1+0.07)^{21}}{(1+0.07)^{21} - 1}\right]$$

$$R = 60{,}000(1.838459212)\left(\frac{0.289839366}{3.140562375}\right)$$

$$R = 60{,}000\ (1.838459212)(0.092289001)$$

$$R = 60{,}000\ (0.169669565)$$

$$R = 10{,}180.17$$

6.3.4 Renta de una anualidad anticipada diferida en función del valor actual

Consiste en determinar del valor de cada pago anticipado

Ejemplo 6.8 Un ahorrista deposita S/.60, 000 en un banco que paga el 14% de interés anual para que, dentro de 5 años, empiece a recibir una renta semestral durante 10 años más, Hallar la renta semestral a recibir.

Para dar solución al problema analizamos los períodos a capitalizar y a recuperar; por ser anticipada los periodos de capitalización disminuyen en uno con respecto a las ordinarias, en este caso de 9 a 8, en dicho periodo utilizamos el factor simple de capitalización, y por el resto del período utilizaremos el factor de recuperación de capital por 21 semestres

La fórmula lo deducimos del valor actual de una anualidad diferida anticipada

$$P' = R'\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)k}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

$$R' = P(1+i)t\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = 60{,}000\,(1+0.07)^{8}\left[\frac{0.07(1+0.07)^{21}}{(1+0.07)^{21}-1}\right]$$

$$R = 60{,}000\,(1.7181861798)\left(\frac{0.289839366}{3.140562375}\right)$$

$$R = 60{,}000\ (1.7181861798)(0.092289001)$$

$$R = 60{,}000\ (0.158569686065)$$

$$R = 9514,\ 18$$

6.3.5 Cálculo de n y t en una Anualidad Simple Diferida

En una anualidad diferida se diferencian dos períodos, el período diferido **t** y el número de períodos de renta **n**, de manera que **t+n** constituye el horizonte temporal de la anualidad diferida.

Para el caso de una anualidad diferida ordinaria:

$$P = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^{t}}\right]$$

Efectuando las operaciones correspondientes deducimos las fórmulas:

$$n = \frac{Log\left[\dfrac{R}{R-Pi(1+i)^{t}}\right]}{Log(1+i)}$$

$$t = \frac{Log\left\{\dfrac{R}{Pi}\left[1-\dfrac{1}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{Log(1+i)}$$

Para el caso de una anualidad diferida Anticipada:

$$P = R'\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]\left[\frac{1+i}{(1+i)^{t}}\right]$$

Efectuando las operaciones correspondientes deducimos las fórmulas:

$$n = \frac{Log\left[\dfrac{R'}{R' - Pi(1+i)^{t-1}}\right]}{Log(1+i)}$$

$$t = \frac{Log\left\{\dfrac{R'\left[(1+i)^{n} - 1\right]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)}$$

6.4 Rentas Perpetuas o Vitalicias

Renta perpetua o vitalicia, es una anualidad cuyos pagos empiezan en una fecha determinada y se prolongan indefinidamente.

Todas las expresiones que cualifican a las anualidades, se aplican a las rentas perpetuas; de manera que pueden presentarse como rentas perpetuas vencidas, anticipadas, diferidas, etc.

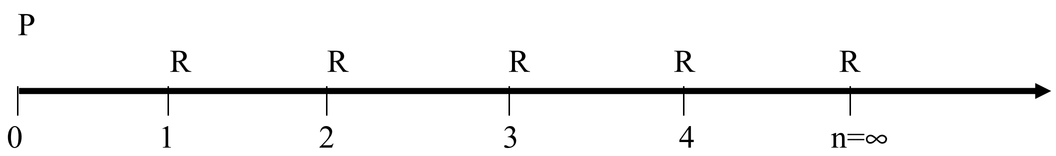
Entre muchas otras las rentas que se pagan a perpetuidad son la renta de un terreno, los legados de fundaciones con el objeto de dar origen a una renta perpetua para fines de bien social, las inversiones en valores no redimibles emitidos por el Estado, los seguros de vida, herencias, etc.

En las rentas perpetuas, no es posible calcular su valor futuro o monto, debido a que el número de períodos es indefinido, sin embargo es posible la cuantificación del valor actual, el valor de la renta y de la tasa de interés.

6.4.1 Valor Actual de una Renta Perpetua Ordinaria

Las rentas ordinarias son pagadas al final de cada período

Fig. 6.9



Para determinar el valor actual de una renta perpetua ordinaria, se divide la renta periódica entre la tasa de interés.

La fórmula se obtiene partiendo del valor actual de una serie uniforme de pagos ordinarios (FAS).

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Operando algebraicamente:

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Si hacemos n = ∞ tendremos $(1+i)^n = \infty$

Luego $\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right] = \left[\frac{1}{\omega}\right] = 0$

$$P = \frac{R}{i}\left[1 - \frac{1}{\omega}\right]$$

$$P = \frac{R}{i}[1 - 0]$$

$$P = \frac{R}{i}[1]$$

$$P_\omega = \frac{R}{i}$$

Fórmula que permite calcular el valor actual o presente de una renta ordinaria perpetua o vitalicia.

Para calcular la anualidad o renta de una perpetuidad se despeja R de la formula anterior y se tiene:

$$R_\omega = Pi$$

Ejemplo 6.9 Una persona al fallecer deja en donación a un hospital para ancianos sus inversiones con la finalidad de generar una renta a perpetuidad de S/.100, 000 al final de cada año. Si la tasa efectiva de interés es del 12% anual, determinar el valor actual de la donación.

$$P_\omega = \frac{100{,}000}{0.12}$$

$$P_{\omega} = \frac{100{,}000}{0.12}$$

$$P_{\infty} = 833{,}333.33$$

Ejemplo 6.10 Encontrar el valor actual de una renta perpetua ordinaria de S/.10, 000 nuevos soles anuales a la tasa del 10% anual convertible trimestralmente.

En este caso la tasa efectiva trimestral es 0.025, como la renta es anual, calculamos la tasa efectiva anual y remplazamos en la fórmula

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n} - 1$$

$$i = \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^{4} - 1$$

$$i = 0.10381289$$

Remplazando en la fórmula

$$P_{\omega} = \frac{10{,}000}{0.10381289}$$

$$P_{\infty} = 96{,}327.15$$

También solucionamos el problema haciendo uso del FDFA

$$P_{\omega} = \frac{R}{i}\left[\frac{i}{(1+i)^{n} - 1}\right]$$

$$P_{\omega} = \frac{10{,}000}{0.025}\left[\frac{0.025}{(1+0.025)^{4} - 1}\right]$$

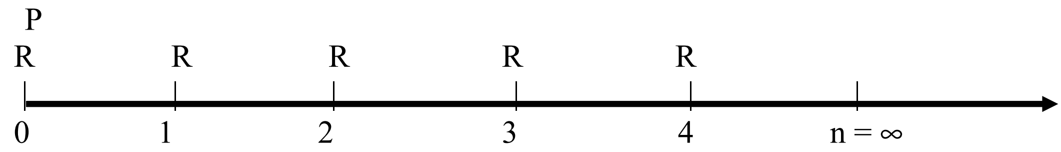
$$P_{\omega} = \frac{10{,}000}{0.025}\left[\frac{0.025}{0.10381289}\right]$$

$$P_{\omega} = 96{,}327.15$$

6.4.2 Valor Actual de una Renta Perpetua Anticipada

Las rentas vitalicias anticipadas son pagadas al inicio de cada período

Fig. 6.10



Para determinar el valor actual de una renta perpetua anticipada, se divide la renta periódica entre la tasa de interés y luego se multiplica por el factor simple de capitalización en un período.

$$P_{\omega} = \frac{R}{i}(1+i)$$

Ejemplo 6.11 Determinar el valor actual de una renta perpetua anticipada de S/.8,000 nuevos soles semestrales a la tasa del 12% anual convertible semestralmente.

$$P_{\omega} = \frac{8{,}000}{0.06}(1+0.06)$$

$$P_{\omega} = \frac{8{,}000}{0.06}(1.06)$$

$$P_{\omega} = 141{,}333.33$$

Si el pago que debe efectuarse de inmediato W, es decir en el período cero, es diferente de la renta periódica R, el valor actual lo calculamos de la siguiente manera:

$$P_{\infty} = W + \frac{R}{i}$$

Ejemplo 6.12 Una institución benefactora otorga una donación a perpetuidad, a una institución educativa, estipulando que de inmediato se haga una entrega de S/.20, 000, para la implementación de la biblioteca y una renta de S/.18,000 a inicio de los años siguientes e indefinidamente, para la adquisición de material de enseñanza. Calcular el valor presente de la donación a una tasa efectiva anual del 12%.

$$P_{\infty} = 20{,}000 + \frac{18{,}000}{0.12}$$

$$P_{\infty} = 170{,}000$$

6.5 Valor de la Renta Perpetua

Consiste en determinar el valor de una renta perpetua ordinaria o anticipada según sea el caso.

6.5.1 Valor de la Renta Perpetua Ordinaria

Para calcular el valor de una renta perpetua ordinaria, se multiplica el valor actual por la tasa de interés.

$$R_{\infty} = P_{\infty} i$$

La fórmula nos permite calcular el valor de la renta perpetua, cuando la tasa y los períodos de capitalización están dados en la misma unidad de tiempo; si están dados en unidades de tiempo diferente es necesario previamente, adecuar la tasa al período de capitalización o solucionar el problema con el auxilio de factores que de acuerdo a las características del problema.

Ejemplo 6.13 Hallar la renta anual de una perpetuidad cuyo valor actual es S/.2'250,000 con el interés del 14% anual capitalizable semestralmente.

Por la frecuencia de capitalización, la tasa efectiva semestral es del 7%, entonces calculamos previamente la tasa efectiva anual.

$$i = (1.07)^2 - 1$$
$$i = 0.1449$$

Remplazamos la tasa obtenida en la fórmula

$$R_{\infty} = 2'250,000 \text{ x } 0.1449$$

$$R_{\infty} = 326,025$$

El problema también lo resolvemos con el factor de capitalización de una serie dado a que la capitalización es semestral y la rentas anual.

$$R_{\omega} = P_{\omega} i \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$R_{\omega} = P_{\omega} 0.07 \left[\frac{(1+0.07)^2 - 1}{0.07} \right]$$

$$R_{\omega} = 2'250,000(0.1449)$$
$$R_{\omega} = 326,025$$

6.5.2 Valor de la Renta Perpetua Anticipada

Para calcular el valor de una renta perpetua anticipada, despejamos la fórmula del valor actual de una anualidad anticipada.

$$P_{\omega} = \frac{R}{i}(1+i)$$

$$R(1+i) = P_{\infty} i$$

$$R_{\infty} = P_{\infty} i \left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

Ejemplo 6.14 Hallar la renta anticipada mensual, por concepto de alquiler de un inmueble en forma indefinida cuyo valor actual es S/.102,000, a una tasa efectiva mensual del 2%.

$$R_{\infty} = 102{,}000 \text{ x } 0.02 \left[\frac{1}{(1.02)}\right]$$

$$R_{\infty} = 2{,}040 \left[\frac{1}{(1.02)}\right]$$

$$R_{\infty} = 2{,}000$$

6.6 Listado de Formulas

Fórmula	Factor	Obtiene

S = R $\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$	FCS	Monto de una anualidad simple diferida
S = R' $\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right](1+i)$	FCS	Monto de una anualidad simple diferida anticipada
P = R $\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$	FASxFSA	Valor actual de una anualidad simple diferida ordinaria
P = R' $\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]\left[\frac{1+i}{(1+i)^{t}}\right]$	FAS	Valor actual de una anualidad simple diferida anticipada
R = S $\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]$	FDFA	Renta uniforme diferida ordinaria en función del monto
R' = S $\left[\frac{i}{(1+i)^{n}-1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$	FDFA	Renta uniforme diferida anticipada en función del monto
R = P $(1+i)^{t}\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right]$	FRC	Renta uniforme diferida ordinaria en función del valor actual
R' = P $\left[\frac{(1+i)^{n}}{1+i}\right]\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right]$	FRC	Renta uniforme diferida anticipada en función del valor actual
n = $\frac{Log\left[\frac{R}{R-Pi(1+i)^{t}}\right]}{Log(1+i)}$	NPER	Número de periodos en una anualidad simple diferida ordinaria
n = $\frac{Log\left[\frac{R'}{R'-Pi(1+i)^{t-1}}\right]}{Log(1+i)}$	NPER	Número de periodos en una anualidad simple diferida anticipada
t = $\frac{Log\left\{\frac{R}{Pi}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{Log(1+i)}$		Número de periodos diferidos en una anualidad simple diferida ordinaria
t = $\frac{Log\left\{\frac{R'\left[(1+i)^{n}-1\right]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)}$		Número de periodos diferidos en una anualidad simple diferida anticipada

6.7 Problemas propuestos

1. Calcular el valor futuro de una anualidad ordinaria de S/.8, 000 cada año, si el primer pago debe efectuarse dentro de 2 años y se continúa por espacio de 4 años más, a la tasa de interés compuesto del 12% anual.

2. Con la finalidad de formar un monto en un plazo de un año, mediante depósitos ordinarios mensuales se S/.800, a una tasa efectiva mensual del 2%, depositándose la primera cuota dentro de 4 meses. ¿Cuál será el valor del monto?.

3. El proceso de construcción y montaje de una planta de conserva de pescado, tendrá una duración de 9 meses y a partir de un año generará una ganancia neta de S/5,000 cada trimestre, por espacio de 5 años. ¿Cuál será el valor actual de dicha renta, si la tasa nominal mensual es del 1.5% con capitalización trimestral?

4. Si Ud. deposita S/.10, 000 en un banco que paga el 16% de interés anual con capitalización semestral, para que dentro de 3 años, empiece a recibir ordinariamente una renta semestral durante 5 años más, Hallar la renta semestral a recibir.

5. Calcular el valor de la cuota trimestral vencida a pagar, por un préstamo de S/.12, 000 a una tasa de interés efectiva anual del 18% en un período de 2 años, si el primer pago se efectúa al término del segundo trimestre.

6. Calcular la renta anual perpetua que podría obtenerse de un fondo de S/.100, 000 si la tasa de interés es del 16% anual con capitalización semestral

7. Una persona deposita S/.50, 000 en un banco que paga el 18% de interés anual para que, dentro de 5 años, empiece a recibir una renta anual durante 8 años más, Hallar la renta anual a recibir.

8. Se ha invertido en un negocio que empezará a rendir una ganancia mensual de S1, 000 dentro de 2 años por espacio de 2 años más, si la tasa de mercado es del 2% de interés mensual. Calcular el valor actual.

9. El Estado crea un fondo, con la finalidad de generar una renta a perpetuidad de S/.80,000 al final de cada semestre para financiar un asilo de ancianos. Si la tasa de interés es del 8% semestral, determinar el valor actual de dicho fondo.

10. Hallar la renta anual de una perpetuidad cuyo valor actual es S/.200,000 con el interés del 16% anual capitalizable semestralmente

C A P Í T U L O VII

7. ANUALIDADES GENERALES

Con el estudio de los temas anteriores referentes a las anualidades, nos hemos familiarizado con los casos más frecuentes de las anualidades simples. Pero existen casos en los que no hay coincidencia entre el período de pago y el de capitalización, es cuando se evidencia a una anualidad general.

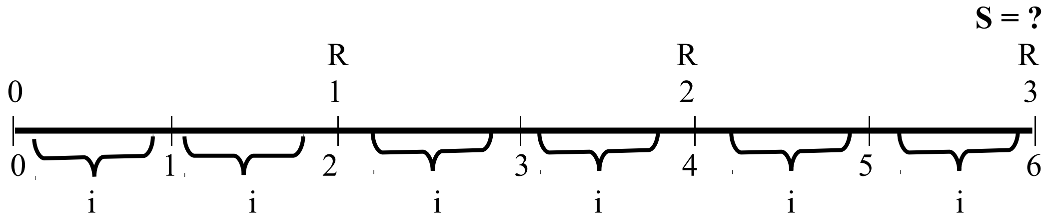
Definición. Una anualidad cierta general, es aquella cuyos períodos de pago de las rentas o cuotas no coinciden con los períodos de capitalización de los correspondientes intereses, presentándose los casos:

a. Varios períodos de capitalización por período de pago
b. Varios períodos de pago por período de capitalización

.

7.1 Monto con varios períodos de capitalización por período de pago

Fig. 7.1



Interpretando la escala de tiempo tenemos:

- R = Renta o cuota anual
- La escala superior de 0 a 3 representa períodos anuales
- La escala inferior de 0 a 6 representa los períodos de capitalización, (Capitalización semestral).
- S, es el monto que queremos calcular

Ejemplo 7.1 Hallar el monto de una serie de cuatro pagos de S/. 6,000 al final de cada año, colocado al 24% de interés compuesto anual con capitalización mensual.

Solucionamos el problema siguiendo los pasos:

Primero convertimos la renta anual en renta mensual, mediante el factor depósito fondo de amortización **FDFA**

$$R = 6000\left[\frac{0.02}{(1+0.02)^{12}-1}\right]$$

$$R = 447.36 \quad = \text{Renta mensual}$$

Luego capitalizamos la renta mensual por el período de cuatro años equivalente a 48 meses y para esto hacemos uso de factor de capitalización de una serie **FCS,** debido a que lo hemos convertido en una anualidad ordinaria simple

$$S = 447.36\left[\frac{(1+0.02)^{48}-1}{0.02}\right]$$
$$S = 35{,}499.59$$

El problema también es susceptible de solucionarse convirtiendo la tasa efectiva mensual, en tasa efectiva anual y luego aplicamos la fórmula del factor de capitalización de una serie, correspondiente a una anualidad simple.

$$i = (1.02)^{12} - 1$$

$$i = 0.268241794$$

Aplicamos la tasa calculada en la fórmula para el monto correspondiente.

$$S = 6{,}000\left[\frac{(1+0.268241794)^{4}-1}{0.268241794}\right]$$

$$S = 35{,}499.40$$

Ejemplo 7.2 Una empresa efectúa depósitos de S/.10,000 cada fin de año, en un fondo que paga el 16% anual convertible trimestralmente, calcular el monto después de 10 años.

Siguiendo el procedimiento en el problema anterior

$$R = 10{,}000\left[\frac{0.04}{(1+0.04)^{4}-1}\right]$$

$$R = 2{,}354.90$$

Luego capitalizamos la renta trimestral por el período de 20 años equivalente a 80 trimestres y para esto hacemos uso de factor de capitalización de una serie **FCS,** debido a que lo hemos convertido en una anualidad ordinaria simple

$$S = 2{,}354.90\left[\frac{(1+0.04)^{40}-1}{0.04}\right]$$

$$S = 223{,}775.59$$

Operando con la tasa de interés.

$$i = (1.04)^4 - 1$$

$$i = 0.16985856$$

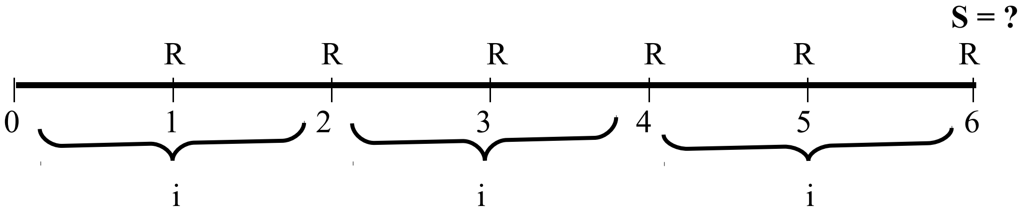
Aplicamos la tasa calculada en la fórmula para el monto correspondiente.

$$S = 10{,}000\left[\frac{(1+0.16985856)^{10}-1}{0.16985856}\right]$$

$$S = 123{,}775.63$$

7.2 Monto con varios períodos de pago por período de capitalización

Fig. 7.2



Aplicando el segundo caso en el que se presentan varios períodos de pago por período de capitalización, para mayor ilustración presentamos el siguiente caso:

Ejemplo 7.3 Calcular el monto de una serie de pagos de S/.1,000 a fin de cada trimestre durante 3 años, con el 12% anual con capitalización semestral.

Para solucionar el problema reflexionamos de la siguiente manera:

La tasa efectiva semestral es del 6%, pero no conocemos la tasa efectiva trimestral y esta lo obtenemos previamente.

$$i = \sqrt{1+TES} - 1$$

Remplazando datos

$$i = \sqrt{1+0.06} - 1$$

$$i = 0.029563014 = \text{tasa efectiva trimestral}$$

Ahora calculamos el monto durante los dos años:

$$S = 1,000\left[\frac{(1+0.029563014)^{12}-1}{0.029563014}\right]$$

$$S = 14,156.85$$

Ejemplo 7.4 ¿Cuanto se habrá acumulado, con imposiciones semestrales iguales de S/.1,200 durante 18 meses, efectuados en un banco que paga una tasa nominal mensual del 1% con capitalización trimestral?

$$i = (1.03)^2 - 1$$

$$i = 0.0609$$

El problema corresponde a una anualidad anticipada, en consecuencia calculamos el monto mediante la siguiente fórmula.

$$S = 1,200\left[\frac{(1+0.0609)^3-1}{0.0609}\right](1+0.0609)$$

$$S = 4,056.55$$

7.3 Valor presente de una anualidad general

Para calcular el valor actual de una anualidad general, es necesario convertir previamente, la anualidad general en anualidad simple, a fin de hacer uso de los factores referentes a dicha anualidad.

Ejemplo 7.5 Calcular el valor presente de una serie de pagos de S/. 5,000 cada uno, efectuados ordinariamente y en forma semestral durante 7 años y 6 meses al 16% anual con capitalización trimestral.

Como los pagos son semestrales lo convertimos en trimestrales mediante el **FDFA**

$$R = 5,000\left[\frac{0.04}{(1+0.04)^2-1}\right]$$

$$R = 2,450.98$$

Actualizamos mediante el factor de actualización de una serie **FAS,** la serie trimestral durante todo el período de 30 trimestres

$$P = 2,450.98\left[\frac{(1+0.04)^{30}-1}{0.04(1+0.04)^{30}}\right]$$

$$P = 2,450.98\left[\frac{2.24339751}{0.1297359}\right]$$

$$P = 2{,}450.98\ (17.2920333539)$$

$$P = 42{,}382.43$$

Ejemplo 7.6 Calcular el valor actual de un flujo anticipado de S/. 2,000 cada uno, efectuados en forma mensual durante 5 años y 10 meses al 16% anual con capitalización semestral.

Dada la tasa efectiva semestral y el flujo mensual, empezamos calculando la tasa efectiva mensual.

$$i_M = \sqrt[n]{1+i_S} - 1$$
$$i_M = \sqrt[6]{1+0.08} - 1$$

$$i_M = 0.012909457$$

Remplazamos la tasa en la fórmula para el cálculo del valor actual de una anualidad anticipada.

$$P = 2{,}000 \left[\frac{(1.0129)^{70} - 1}{0.0129(1+0.0129)^{70}} \right] (1.0129)$$

$$P = 2{,}000 \left(\frac{1.4527878111}{0.03160962} \right) (1.0129)$$

$$P = 93{,}014.16$$

7.4 Valor de la renta de una anualidad general ordinaria

El valor de la renta de una anualidad se determina aplicando factores combinados o transformando la tasa efectiva en un período equivalente al período de la renta.

Ejemplo 7.7 Una persona espera adquirir dentro de 4 años una máquina avaluada en S/.50, 000. ¿Cuánto deberá ahorrar en un banco ordinariamente y en forma trimestral, a una tasa efectiva anual del 12%, a fin de realizar la compra?

$$i_T = \sqrt[n]{1+i_A} - 1$$

$$i_T = \sqrt[4]{1+0.12} - 1$$

$$i_T = 0.028737345$$

Luego remplazamos en la fórmula del FDFA

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = 50{,}000\left[\frac{0.028737345}{(1+0.028737345)^{16} - 1}\right]$$

$$R = 2{,}505.35$$

Ejemplo 7.8 Una empresa adquiere una propiedad avaluada en S/600,000 a 10 años de plazo, con una cuota inicial de S/.100, 000 y el saldo pagadero con cuotas ordinarias trimestrales, si la tasa efectiva anual es del 16%. ¿Cuál será el valor de cada pago?

$$i_T = \sqrt[n]{1+i_A} - 1$$

$$i_T = \sqrt[4]{1+0.16} - 1$$

$$i_T = 0.037801986$$

Procedemos en forma similar al anterior con el uso del FRC

$$P = 600{,}000 - 100{,}000$$

$$P = 500{,}000$$

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = 500{,}000\left[\frac{0.037801986(1+0.037801986i)^{40}}{(1+0.037801986)^{40} - 1}\right]$$

$$R = 500{,}000\left(\frac{0.166761009}{3..411435138}\right)$$

$$R = 24{,}441.47$$

7.5 Valor de la renta de una anualidad general anticipada

Resolver los problemas de los ejemplos 7.7 y 78, en el caso de ser anualidades anticipadas.

Ejemplo 7.9 Una persona espera adquirir dentro de 4 años una máquina avaluada en S/.50,000. ¿Cuánto deberá ahorrar en un banco anticipadamente y en forma trimestral, a una tasa efectiva anual del 12%, a fin de realizar la compra?.

La obtención de la tasa efectiva trimestral no varía

$$i_T = \sqrt[n]{1+i_A} - 1$$

$$i_T = \sqrt[4]{1+0.12} - 1$$

$i_T = 0.028737345$

Luego remplazamos en la fórmula de factores combinados, el FDFA y el FSA

$$R' = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

$$R' = 50{,}000\left[\frac{0.028737345}{(1+0.028737345)^{16} - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.028737345)}\right]$$

$$R' = 50{,}000\ (0.050107017)\ (0.97206542)$$

$$R' = 2{,}435.36$$

Ejemplo 7.10 Una empresa adquiere una propiedad avaluada en S/500,000 a 10 años de plazo, para cancelarse con cuotas anticipadas trimestrales, si la tasa efectiva anual es del 16%. ¿Cuál será el valor de cada pago?.

$$i_T = \sqrt[n]{1+i_A} - 1$$

$$i_T = \sqrt[4]{1+0.16} - 1$$

$$i_T = 0.037801986$$

Procedemos en forma similar al anterior con el uso del FRC y el FSA

$$P = 600{,}000 - 100{,}000$$

$$P = 500{,}000$$

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

$$R = 500{,}000\left[\frac{0.037801986(1+0.037801986i)^{40}}{(1+0.037801986)^{40} - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.037801986)}\right]$$

$$R = 500{,}000\left(\frac{0.166761009}{3..411435138}\right)(0.963574953)$$

$$R = 23{,}551.19$$

7.6 Problemas propuestos

1. Hallar el monto de una serie de pagos de S/. 6,000 al final de cada semestre, colocado al 12% de interés compuesto anual con capitalización mensual durante 3 años.

2. Calcular el monto de una serie de pagos ordinarios de S/.1, 200 a fin de cada mes durante 2 años, al 16% anual con capitalización trimestral.

3. ¿Cuánto se habrá capitalizado al término de 18 meses, si se efectuaron depósitos ordinarios bimestrales de S/.800 cada uno, capitalizados al 24% anual convertible semestralmente?

4. Calcular el valor presente de una serie de pagos de S/. 1,000 cada uno, efectuados ordinariamente y en forma trimestral durante 2 años y 6 meses al 18% anual con capitalización mensual.

5. Un comerciante debe pagar por el saldo de un préstamo 10 cuotas trimestrales de S/.1, 200 cada uno; pero con el propósito de liquidar la deuda propone a su acreedor cancelarlo hoy totalmente. ¿Cuánto deberá pagar si la tasa de interés es del 18% anual capitalizable anualmente?

6. Una deuda de S/.100, 000 se debe amortizar en 5 años con cuotas ordinarias anuales iguales al 16% de interés compuesto anual con capitalización semestral sobre el saldo. Calcular el valor de la cuota anual y elaborar el cuadro de amortización de la deuda.

7. Una empresa desea saber cuanto depositar anualmente en una cuenta, a fin de formar un fondo dentro de 5 años, para remplazar una máquina cuyo costo se estima en S/.60, 000, si el banco paga el 18% anual con capitalización trimestral.

8. Calcular la cuota ordinaria trimestral que permita cancelar una deuda de S/.15, 000 en 5 años, a una tasa de interés nominal del 4.5% trimestral con capitalización mensual.

9. ¿Qué tiempo será necesario depositar semestralmente la cantidad de S/.1,600 para formar fondo de S/.12,000, asumiendo una tasa del 20% anual con capitalización cuatrimestralmente?.

10. ¿En cuanto tiempo se liquidará una deuda de S/.22,000, con cuotas mensuales de S/.1,000, si el banco cobra una tasa efectiva del 10% semestral?.

C A P Í T U L O VIII

8. AMORTIZACIÓN, DEPRECIACIÓN Y AGOTAMIENTO

8.1 Amortizaciones

Amortizar es el proceso financiero mediante el cual, se cancela o extingue gradualmente una deuda, por medio de pagos periódicos que pueden ser uniformes o diferentes.

En las amortizaciones cada cuota que se entrega sirve para pagar los intereses y reducir gradualmente el importe de la deuda.

En el tema de las amortizaciones se presentan diversos sistemas y dentro de estas variantes, desarrollamos los de mayor frecuencia en el sistema financiero de nuestro medio, consistente en la amortización gradual.

A su veZ, en la amortización gradual se presentan las modalidades de pago vencido y anticipado, que constituye un sistema por cuotas de valor constante con intervalos de tiempo también iguales e intereses sobre el saldo; lo que comúnmente en el sistema financiero se le conoce como deudas con intereses al rebatir.

La amortización gradual fue creada en Europa y en la actualidad es la más generalizada y de mayor aplicación en el sistema financiero y a la vez es una aplicación de las anualidades estudiadas previamente en los capítulos anteriores.

8.1.1 Amortizaciones Vencidas a Cuota Constante.

En la amortización de una deuda, cada pago al acreedor contiene los intereses y una parte del principal.

Para liquidar una deuda con pagos ordinarios constantes, amortización gradual e intereses sobre el saldo, utilizamos el factor de recuperación de capital **FRC**.

$$R = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Ejemplo 8.1 una deuda de S/.400, 000 se debe amortizar en 5 años con cuotas ordinarias anuales iguales al 16% de interés compuesto anual sobre el saldo. Calcular el valor de la cuota anual y elaborar el cuadro de amortización de la deuda.

Reemplazando valores:

$$R = 400{,}00 \left[\frac{0.16(1+0.16)^5}{(1+0.16)^5 - 1} \right]$$

$$R = 400,\ 00 \left(\frac{0.336054665}{1.100341658} \right)$$

$$R = 400,\ 00\ (0.305409381)$$

$$R \;=\; 122{,}163.75$$

CUADRO DE AMORTIZACIONES

AÑOS	CUOTA ANUAL	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA A INICIO DE PERIODO
0				400,000.00
1	122,163.75	64,000.00	58,163.75	341,836.25
2	122,163.75	54,693.80	67,469.95	274,366.30
3	122,163.75	43,898.61	78,265.14	196,101.16
4	122,163.75	31,376.18	90,787.56	105,313.51
5	122,163.75	16,850.16	105,313.59	0.00

Ejemplo 8.2 Una empresa, debe liquidar una deuda de S/.50,000 con pagos ordinarios semestrales en 5 años, al 12% de interés compuesto anual con capitalización semestral. Calcular el valor de la cuota semestral a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

Cuando la tasa de interés y los pagos están dados en períodos menores a un año, lo solucionamos de la siguiente manera:

$$R \;=\; P\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right]$$

$$R \;=\; 50{,}000\left[\frac{0.06(1+0.06)^{10}}{(1+0.06)^{10}-1}\right]$$

$$R \;=\; 50{,}000\,(0.135867958)$$

$$R \;=\; 6{,}793.40$$

CUADRO DE AMORTIZACIONES

AÑOS	CUOTA SEMESTRAL	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA A INICIO DE PERIODO

0				50,000.00
1	6,793.40	3,000.00	3,793.40	46,206.60
2	6,793.40	2,772.40	4,021.00	42,185.60
3	6,793.40	2,531.14	4,262.26	37,923.34
4	6,793.40	2,275.40	4,518.00	33,405.34
5	6,793.40	2,004.32	4,789.08	28,616.26
6	6,793.40	1,716.97	5,076.43	23,539.83
7	6,793.40	1,412.39	5,381.01	18,158.82
8	6,793.40	1,089.53	5,703.87	12,454..95
9	6,793.40	747.30.	6,046.10	6,408.85
10	6,793.40	384.53	6,408.85	0.0

8.1.2 Amortizaciones Anticipadas a Cuota Constante.

En el sistema de amortización gradual a cuota anticipada, la entidad financiera que otorga el préstamo, efectúa un desembolso menor al solicitado por el deudor: debido a que el vencimiento de la primera cuota y el desembolso se efectúan coincidentemente en el período cero.

Es decir que la entidad financiera hace entrega al solicitante el valor del préstamo descontado la primera cuota.

Para liquidar una deuda con pagos anticipados constantes, calculamos la cuota a pagar, utilizamos los factores combinados referente al factor de recuperación de capital **FRC**. y el factor simple de actualización **FSA.**

Ejemplo 8.3 Un comerciante tiene el compromiso de rembolsar un préstamo de S/.20,000 con pagos anticipados semestrales en 2 años y seis meses, al 12% de interés compuesto anual con capitalización semestral. Calcular el valor de la cuota semestral a pagar y formular el cuadro de amortizaciones

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+i)}\right]$$

$$R = 20{,}000\left[\frac{0.06(1+0.06)^5}{(1+0.06)^5 - 1}\right]\left[\frac{1}{(1+0.06)}\right]$$

$$R = 20{,}000\left(\frac{0.080293534}{0.338225578}\right)0.943396226$$

$$R = 4{,}479.18$$

CUADRO DE AMORTIZACIONES

AÑOS	CUOTA SEMESTRAL	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA A INICIO DE PERIODO

0				20,000.00
1	4,479.18	0.00	4,479.18	15,520.82
2	4,479.18	931.25	3,547.93	11,972.89
3	4,479.18	718.37	3,760.81	8,212.08
4	4,479.18	492.72	3,986.46	4,225.62
5	4,479.18	253.54	4,225.62	0.00

8.1.3 Amortizaciones Vencidas a Cuota Constante, cuando el Préstamo se desembolsa en partes

Los créditos otorgados por las entidades financieras no siempre se desembolsan de una sola vez; cuando los proyectos son de larga maduración, el proceso de financiamiento suele programarse de acuerdo al calendario de inversiones y al avance de la obra.

Ejemplo 8.4 El Banco del Norte aprueba un crédito a la empresa Agroindustria S. A. por S/.100, 000 amortizable en 5 cuotas semestrales uniformes, aplicando una tasa efectiva semestral del 8%. Efectuándose los desembolsos de acuerdo al siguiente cronograma: Al empezar las instalaciones S/.50, 000, tres meses después S/.30, 000 y al final de los tres meses siguientes S/20,000, Calcular la cuota uniforme de amortización y formular el cuadro de amortizaciones.

Calculamos el valor equivalente de los desembolsos parciales en el período cero, cuya suma constituye el valor actual del préstamo y luego calculamos la cuota uniforme mediante el FRC.

Valor actual del préstamo:

$$P = 50{,}000 + 30{,}000\left[\frac{1}{(1.08)^{0.5}}\right] + 20{,}000\left[\frac{1}{(1.08)}\right]$$

$$P = 50{,}000 + 28{,}867.51 + 18{,}518.52$$

$$P = 97{,}386.03$$

Valor de la cuota uniforme de pago

$$R = 97{,}386.03\left[\frac{0.08(1.08)^5}{(1.08)^5 - 1}\right]$$

R = 24,390.96

CUADRO DE AMORTIZACIONES

AÑOS	CUOTA SEMESTRAL	INTERESES	AMORTIZACIÓN	DEUDA A INICIO DE PERIODO
0				97,386.03
1	24,390.96	7,790.88	16,600.08	80,785.95
2	24,390.96	6,462.88	17,928.08	62,857.87
3	24,390.96	5,028.63	19,362.33	43,495.54
4	24,390.96	3,479.61	20,911.32	22,584.22
5	24,390.96	1,806.74	22,584.22	0.00

8.2 Depreciaciones

Los bienes duraderos que forman parte del activo fijo tangible, como las herramientas, instalaciones, edificios, material rodante, etc. están sujetos a una disminución de sus valores, originado por el uso a que están sometidos, el sólo transcurrir del tiempo, la obsolescencia por el desuso, etc. Por tal razón es necesario destinar periódicamente una cierta cantidad de dinero, de tal modo que al término de su vida útil se disponga de un fondo de reserva por depreciación que sumado al valor residual nos permita el remplazo.

Causas que Originan la Depreciación

Las causas que generan la depreciación pueden clasificarse principalmente en:

a. Causas físicas
El uso de los bienes que generan un desgaste o perdida de valor, la acción del tiempo y los elementos naturales que provocan el deterioro de los bienes de capital como las lluvias, la humedad, etc. Son, entre otras, las causas físicas de la depreciación.

b. Causas funcionales
Las causas funcionales están dadas por la insuficiencia y la obsolescencia de los bienes de capital. La insuficiencia se produce cuando la capacidad del bien en cuestión es insuficiente para satisfacer el mercado, haciéndose necesario su reemplazo por otros equipos de mayor capacidad; esto implica una disminución del valor de los equipos por acción del reemplazo.

La obsolescencia es el envejecimiento prematuro de un bien a consecuencia del avance tecnológico.

Simbología

Para la determinación de estas cuotas de depreciación se hará uso de los siguientes símbolos:

C = Costo de adquisición o valor original del activo.

n = Periodo de vida útil, es decir el numero de años, durante los cuales se presume que debe funcionar normalmente.

t = Año de servicio dado

VR = Valor de salvamento, deshecho de recuperación o valor residual del bien, entendiéndose como tal el valor posible que se puede obtener al venderse el bien, cuando este en situación de obsolescencia o fuera de uso.

D = Depreciación del activo

VL = Valor contable o valor en libros

i = Tasa de interés vigente en el mercado financiero.

F = Fondo de reserva o depreciación acumulada

8.3 Métodos de Cálculo de las Depreciaciones

Los diversos métodos de cálculo de las depreciaciones responden a los criterios de establecer cuotas constantes, cuotas decrecientes o crecientes.

8.3.1 Depreciación a cuota constante

Dentro de este rubro consideremos el método de la línea recta o lineal, el método del fondo de amortización, el de la anualidad y el de las horas o unidades producidas.

a. Método de la línea recta o lineal

Este método es el más sencillo y consiste en determinar una cuota anual constante, durante el periodo de vida útil del bien de capital.
En este método la depreciación es igual al costo de adquisición menos el valor residual dividido por el número de años de vida útil.

$$D = \frac{C - VR}{n}$$

Ejemplo 8.5 El costo de adquisición de una máquina es de S/. 200,000 y de S/.20,000 su valor residual, al que se le asigna una vida útil de 10 años. Elaborar un cuadro de depreciaciones y determinar mediante la fórmula correspondiente, el valor en libros al término del cuarto año.

$$D = \frac{200{,}000 - 20{,}000}{10}$$

$$D = 18{,}000$$

CUADRO DE DEPRECIACIONES

n	D	Valor a depreciar C – VR	F	VL
0		180,000		200,000
1	18,000	162,000	18,000	182,000
2	18,000	144,000	36,000	164,000
3	18,000	126,000	54,000	146,000
4	18,000	108,000	72,000	128,000
5	18,000	90,000	90,000	110,000
6	18,000	72,000	108,000	92,000
7	18,000	54,000	126,000	74,000
8	18,000	36,000	144,000	56,000
9	18,000	18,000	162,000	38,000
10	18,000	0,000	180,000	20,000

El valor en libros para el año t = 4 lo calculamos mediante la fórmula:

$$VL_t = (C - VR)\left(\frac{n-t}{n}\right) + VR$$

$$VL_4 = (200{,}000 - 20{,}000)\left(\frac{10-4}{10}\right) + 20{,}000$$

$$VL_4 = 128{,}000$$

Este método es el más usado en nuestro medio, por la facilidad del cálculo que ofrece. Pero tiene el inconveniente en primer lugar, el de no considerar los intereses de la inversión, efectuada en el bien y los intereses que corresponden a las cuotas de depreciación. En segundo lugar su aplicación implica el supuesto de que la disminución del valor del bien se produce linealmente, lo que no es un hecho real, especialmente cuando se trata de bienes sujetos a fuertes rozamientos.

Este método se justifica cuando se considera la totalidad de los bienes de una empresa, ya que así se produce una cierta compensación entre los bienes a depreciarse.

b. Método del fondo de amortización

Este método consiste en determinar un fondo de depósito anual, que capitalizado a una tasa de interés, durante el periodo de vida útil de la máquina, se acumule un monto equivalente al costo neto del bien sujeto a depreciación.

Se considera el interés por el hecho de que podemos suponer que la empresa en lugar de retener las cuotas de depreciación, las deposita en un banco, de modo tal que después de los n años de vida útil reciba el valor del bien.

Por consiguiente, este método permite que la empresa recupere parte de las inversiones en activos fijos por medio de la depreciación y parte por medio de intereses para reemplazarlo al final de su vida útil.

Para el cálculo de la cuota de depreciación se emplea el factor depósito fondo de amortización.

$$D = (C - VR)\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

En este caso la cuota de depreciación es constante, pero debe capitalizarse a fin de constituir un monto equivalente al valor del bien sujeto a depreciación.

Ejemplo 8.6 Con los datos utilizados en el ejemplo anterior y aplicando este nuevo método, a una tasa de interés del 15% anual, podemos determinar la cuota de depreciación constante y constituir una tabla analítica de depreciación durante la vida útil del activo fijo de la siguiente manera:

$$D = 180{,}000\left[\frac{0.15}{(1.15)^{10} - 1}\right]$$

$$D = 180{,}000\left[\frac{0.15}{3.045557736}\right]$$

$$D = 180{,}000(0.049252062)$$

$$D = 8{,}865.37$$

CUADRO DE DEPRECIACION ANUAL

n	D	$D(1+i)^{t-1}$	C - VR	VL

0			180,000.00	200,000.00
1	8,865.37	8,865.37	171,134.63	191.134.63
2	8,865.37	10,195.17	160,939.46	180,939.46
3	8,865.37	11,724.45	149,215.01	169,215.01
4	8,865.37	13,483.12	135,731.89	155,731.89
5	8,865.37	15,505.59	120,226.30	140,226.30
6	8,865.37	17,831.43	102,394.87	122,394.87
7	8,865.37	20,506.14	81,888.73	101,888.73
8	8,865.37	23,582.06	58,306.67	78,306.67
9	8,865.37	27,119.37	31,187.30	51,187.30
10	8,865.37	31,187.30	0.00	20,000.00

Este método contempla los intereses de cuota de depreciación, pero excluye los intereses de la inversión total. Esta deficiencia se supera con el método de la anualidad, de la que a continuación nos ocupamos.

El valor en libros para el año t = 4 lo calculamos mediante la fórmula:

$$VL_t = C - D\left[\frac{(1+i)^t}{i} - 1\right]$$

$$VL_4 = 200{,}000 - 8{,}865.37\left[\frac{(1+0.15)^4}{0.15} - 1\right]$$

$$VL_4 = 155{,}371.88$$

c. Método de anualidades o del interés sobre la inversión

Este método consiste en fijar un interés sobre la inversión en el activo fijo a depreciarse, o sea la cuota de depreciación correspondiente a este método, es igual a la cuota calculada en el método del fondo de amortización más el interés simple calculado sobre el costo de adquisición del bien sujeto a depreciación. De lo que se deduce la formula siguiente:

$$D = Ci + (C - VR)\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Ejemplo 8.7 Para demostrar la aplicación práctica de este método utilizamos los datos del problema anterior.

$$D = 200{,}000 \times 0.15 + (200{,}000 - 20{,}000)\left[\frac{0.15}{(1+0.15)^{10} - 1}\right]$$

$$D = 30{,}000 + (180{,}000 \times 0.049252062)$$

$$D = 38{,}865.37$$

CUADRO DE DEPRECIACIÓN

n	D	$(D-Ci)(1+i)^{t-1}$	C – VR	VL
0			180,000.00	200,000.00
1	38,865.37	8,865.37	171,134.63	191.134.63
2	38,865.37	10,195.17	160,939.46	180,939.46
3	38,865.37	11,724.45	149,215.01	169,215.01
4	38,865.37	13,483.12	135,731.89	155,731.89
5	38,865.37	15,505.59	120,226.30	140,226.30
6	38,865.37	17,831.43	102,394.87	122,394.87
7	38,865.37	20,506.14	81,888.73	101,888.73
8	38,865.37	23,582.06	58,306.67	78,306.67
9	38,865.37	27,119.37	31,187.30	51,187.30
10	38,865.37	31,187.30	0.00	20,000.00

Como puede observarse este método contempla los intereses del capital invertido y los intereses de la cuota de depreciación.

En este caso el valor en libros para el año **t** lo determinamos con la fórmula:

$$VL_t = C - (D - Ci)\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

Para el año 6:

$$VL_6 = 200{,}000 - (38{,}865.37 - 200{,}000 \text{ x } 0.15)\left[\frac{(1.15)^6 - 1}{0.15}\right]$$

$$VL_6 = 200{,}000 - 8{,}865.37\left[\frac{(1.15)^6 - 1}{0.15i}\right]$$

$$VL_6 = 122{,}394.87$$

d. Método de las horas o unidades producidas

Este método puede ser de cuota constante o variable, según sea el caso del nivel de producción o servicio que brinde el activo, dado a que se asume que los cargos por depreciación dependen más del uso que de la vida útil del bien.

La cuota de depreciación será constante, cuando el nivel de producción o servicio también es constante, caso poco frecuente en la actividad económica

Por lo general los niveles de producción o servicios son variables, de modo que habrá una mayor depreciación en los períodos de gran actividad productiva y viceversa.

Este método se emplea en los activos cuyo uso se puede medir en términos de: número de unidades producidas, número de horas trabajadas, kilómetros recorridos, carga transportada en sus diferentes unidades de medida, etc.

La cuota de depreciación lo obtenemos con la fórmula:

$$D_t = \left(\frac{C - VR}{V}\right)U$$

V = Vida útil del activo basado en el uso
U = Unidades producidas por período.
T = Período al que corresponde la cuota y los demás valores.

Ejemplo 8.8 Una máquina cuyo costo de adquisición es de S/. 80,000 y de S/.10,000 su valor residual, la vida útil de producción se estima en 200,000 unidades distribuidas en 5 años, con los siguientes niveles de producción: 50,000 unidades el primer año, 45,000 unidades el segundo y tercer año, 35,000 el cuarto año y 25,000 el quinto año. Determinar las cuotas anuales de depreciación y elaborar el cuadro de depreciaciones.

Cálculo de la depreciación por período:

$$D_t = \left(\frac{C - VR}{V}\right)U$$

Calculamos previamente la constante formada por el valor a depreciar dividido por la vida útil del activo.

$$\frac{80{,}000 - 10{,}000}{200{,}000} = 0.35$$

Como 0.35 es un valor constante lo remplazamos en la fórmula.

$$D_1 = 0.35 \text{ x } 50{,}000 = 17{,}500$$
$$D_2 = 0.35 \text{ x } 45{,}000 = 15{,}750$$
$$D_3 = 0.35 \text{ x } 45{,}000 = 15{,}750$$
$$D_4 = 0.35 \text{ x } 35{,}000 = 12{,}250$$
$$D_5 = 0.35 \text{ x } 25{,}000 = 8{,}750$$

CUADRO DE DEPRECIACIÓN

		F	C - VR	VL

n	D			
0			70,000	80,000
1	17,500	17,500	52,500	62,500
2	15,750	33,250	36,750	46,750
3	15,750	49,000	21,000	31,000
4	12,250	61,250	8,750	18,750
5	8,750	70,000	0.00	10,000

Para la obtención del valor en libros en el año **t** utilizamos la fórmula:

$$VL_t = C - \frac{C - VR}{V} \sum_{1}^{t} U_t$$

Si nuestra preocupación es determinar el valor en libros para el año 3 lo obtenemos de la siguiente manera:

$$VL_3 = 80{,}000 - \frac{80{,}000 - 10{,}000}{200{,}000}\ 140{,}000$$

$$VL_3 = 31{,}000$$

8.3.2 Depreciación a Cuota Decreciente

Existen diversos métodos de depreciación, mediante los cuales las cuotas son elevadas en los primeros años, las mismas que van disminuyendo a medida que se suceden los ejercicios económicos, de tal manera que en los últimos años de vida útil las cuotas de depreciación sean pequeñas, a fin de que los gastos por reparación y mantenimiento que en esos años se elevan no afecten excesivamente los costos. Entre estos métodos tenemos:

a. Métodos de suma de Dígitos

Por este método la cuota de depreciación resulta ser en los primeros años mayor que en los últimos. Se conoce también como el método de la tasa variable sobre base fija.

La fórmula de cálculo de la cuota de depreciación por este método es la siguiente:

$$D = \frac{n - t + 1}{\sum t}(C - VR)$$

Por ser cuota decreciente la **t** toma los valores de acuerdo al año que se calcula la depreciación y en el denominador el sub índice i indica que se suman todos los valores de la t de acuerdo a la vida útil del activo.

Ejemplo 8.9 Una empresa ha comprado una máquina en S/.50, 000 soles y estima que tendrá una vida útil de 10 años y un valor residual de S/.6 000 soles

Cuando t = 1 : $D = \frac{10-1+1}{55}(50{,}000-6{,}000)$

$D = \frac{10}{55}(44{,}0000)$

$D = 8{,}000$

Cuando t = 2 : $D = \frac{10-2+1}{55}(50{,}000-6{,}000)$

$D = \frac{9}{55}(44{,}0000)$

$D = 7{,}200$

Los cálculos se suceden mediante el mismo procedimiento durante la vida útil del activo.

CUADRO DE DEPRECIACIÓN

N	D	C - VR	F	VL_t
0		44,000		50,000
1	8,000	36,000	8,000	42,000
2	7,200	28,800	15,200	34,800
3	6,400	22,400	21,600	28,400
4	5,600	16,800	27,200	22,800
5	4,800	12,000	32,000	18,000
6	4,000	8,000	36,000	14,000
7	3,200	4,800	41,600	10,800
8	2,400	2,400	43,200	8,400
9	1,600	800	44,000	6,800
10	800	0		6,000

Valor en libros para el año **t**:

$$VL_t = C - \frac{t(n-t/2+0.5)}{\sum t}(C-VR)$$

Para el año 5:

$$VL_5 = 50{,}000 - \frac{5(10-5/2+0.5)}{55}(50{,}000-6{,}000)$$

$VL_5 = 18,000$

b. Método de la Tasa Fija Sobre el Saldo

Consiste en aplicar una tasa fija sobre el saldo a depreciar, en cada año de vida útil, su importe es decreciente a medida que se suceden los períodos de depreciación hasta alcanzar la última etapa, dicha tasa lo designamos por i para los fines de cálculo.

Fórmula para el cálculo de la tasa de depreciación:

$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{VR}{C}}$$

Luego la cuota de depreciación se obtiene multiplicando el valor en libros de cada año por la tasa de depreciación, de la manera siguiente:

$$D = VLi$$

Ejemplo 8.10 Para demostrar lo manifestado utilizamos los datos del ejemplo anterior.

$$i = 1 - \sqrt[10]{\frac{6,000}{50,000}}$$

$$i = 1 - 0.808943378$$

$$i = 0.191056621$$

Ahora estamos en condiciones de determinar la cuota de depreciación para cada año

Cuando t = 1 $D = 50,000 \times 0.191056621$

$D = 9,552.83$

Cuando t = 2 $D = 40,447.17 \times 0.191056621$

$D = 7,727.70$

Así sucesivamente hasta el último año de vida útil.

CUADRO DE DEPRECIACIÓN

N	D	F	VL_t

0			50,000
1	9,552.83	9,552.83	40,447.14
2	7,727.70	17,280.53	32,719.44
3	6,251.26	23,531.79	26,468.18
4	5,056.92	28,588.71	21,411.26
5	4,090.76	32,679.47	17,320.50
6	3,309.20	35,988.67	14,011.30
7	2,676.95	38,665.62	11,334.35
8	2,165.50	40,831.12	9,168.85
9	1,751.77	42,582.89	7,417.08
10	1,417.08	44,000.00	6,000.00

Para determinar el valor en libros al final del año **t** no valemos de la fórmula:

$$VL_t = C\,(1-i)^t$$

Para el año 8:

$$VL_8 = 50{,}000\,(1-0.191056621)^8$$

$$VL_8 = 9{,}168.85$$

8.3.3 Depreciación a Cuota Creciente

Existen métodos de depreciación, mediante los cuales las cuotas van en sentido ascendente a medida que se suceden los ejercicios económicos.

Su aplicación es casi nula en nuestro medio, pero es recomendable su uso en proyectos nuevos, debido a que el rendimiento por lo general es bajo en los primeros años, lo que va mejorando paulatinamente, permitiendo una mayor carga en los costos por concepto de depreciaciones en los últimos años.

a. Método de Kunztle.

La fórmula a emplear para calcular la depreciación anual mediante este método es el siguiente:

$$D = \frac{C-VR}{n^2}(2t-1)$$

Ejemplo 8.11 Una empresa de transportes de carga, compra un camión por S/.120,000 y se estima que el vehículo tendrá una vida útil de 5 años y un valor residual de S/.20,000. Calcular la depreciación anual.

Cuando t = 1 D = $\frac{120{,}000-20{,}.000}{5^2}\left(2x1-1\right)$

D = 4,000

Cuando t = 2 D = $\frac{120{,}000-20{,}.000}{5^2}\left(2x2-1\right)$

D = 12,000

CUADRO DE DEPRECIACIÓN

N	D	C – VR	VL_K
0		100,000	120,000.
1	4,000	96,000	116,000
2	12,000	84,000	104,000
3	20,000	64,000	84,000
4	28,000	36,000	56,000
5	36,000	0	20,000

En el cuadro se observa, que por este método el crecimiento de la cuota de depreciación anual es fuerte, afectando intensamente a los costos en los últimos años, de ahí que no es de uso frecuente.

8.4 AGOTAMIENTO

Es la disminución en el valor de los recursos naturales como consecuencia de su explotación.

El agotamiento se aplica a los recursos naturales no renovables, como los bosques, yacimientos mineros, pozos petroleros, gas natural, etc.
Parecido a las depreciaciones, existen varios métodos para determinar el valor del agotamiento de los recursos no renovables, de los cuales analizaremos, el factor o costo de agotamiento y el método de fondo de amortización.

8.4.1. Método del Factor o Costo de Agotamiento

El método del factor o costo de agotamiento es similar al cálculo de la depreciación.

Los cargos periódicos por agotamiento depende de las reservas probadas del recurso natural y de la intensidad de su explotación.

$$A = \frac{I}{R} N$$

I = Inversión inicial
R = Reservas probadas del recurso natural
A = Agotamiento
N = Nivel de explotación del recurso
VL = Valor contable o valor en libros

Ejemplo 8.12 Una empresa maderera adquiere una superficie forestal en la amazonía peruana por S/.120,000, para ser explotado en 10 años, se estima en la mencionada superficie una reserva de de 40’000,000 de pies de tabla.

El nivel de explotación se estima de la siguiente manera: Los cuatro primeros años se extraerán 3’580,000 pies de tabla por año, en los 3 años posteriores se extraerán 4’180,000 por año y en los tres últimos años se extraerán 4’380,000 por año. Calcular las cargas por agotamiento

Los cuatro primeros años: $$A = \frac{120,000}{40'000,000} 3'580,000$$

$$A = 10,740$$

Los tres años intermedios: $$A = \frac{120,000}{40'000,000} 4'180,000$$

$$A = 12,540$$

Los tres años intermedios: $$A = \frac{120,000}{40'000,000} 4'380,000$$

$$A = 13,140$$

CUADRO DE AGOTAMIENTO

n	A	A Acumulado	VL_t

0			120,000
1	10,740	10,740	109,260
2	10,740	21,480	98,520
3	10,740	32220	87,780
4	10,740	42,960	77,040
5	12,540	55,500	64,500
6	12,540	68,040	51,960
7	12,540	80580	39,420
8	13,140	93,720	26,280
9	13,140	106,860	13,140
10	13,140	120,000	0

El valor en libros:

$$VL_t = I - \frac{I}{R}\sum_{h=1}^{n} N$$

Para el año tres:

$$VL_t = 120{,}000 - \frac{120{,}000}{40'000{,}000} 10'740{,}000$$

$$VL_t = 87{,}780$$

8.4.2 Método del Fondo de Amortización.

Es otro método, en el que se aplica una tasa de reembolso fijada por las entidades competentes de acuerdo al tipo de actividad y para el cálculo de la cuota anual de agotamiento nos valemos del factor depósito fondo de amortización.

Ejemplo 8.13 Una empresa carbonífera es propietaria de una mina cuya inversión inicial asciende a S/.1’350 000 y se estima un período de explotación de 8 años, un valor residual en activos recuperables por S/.250,000 y la tasa de reembolso es del 6%. Calcular las cargas por agotamiento anual y formular el cuadro respectivo.

Fórmula:

$$A = (I - VR)\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$A = (1'350{,}000 - 250{,}000)\left[\frac{0.06}{(1+0.06)^8 - 1}\right]$$

$$A = 111{,}139.54$$

CUADRO DE AGOTAMIENTO

Año n	Agotamiento A	$A(1+i)^{t-1}$	I - VR	Valor en Libros VL
0			1’100,000.00	1’350,000.00
1	111,139.54	111,139.54	988,860.46	1’238,860.46
2	111,139.54	117,807.91	871,052.55	1’121,052.55
3	111,139.54	124,876.39	746,176.16	996,176.16
4	111,139.54	132,368.97	613,807.19	863,807.19
5	111,139.54	140,311.11	473,496.08	723496.08
6	111,139.54	148,729.77	324,766.31	574,766.31
7	111,139.54	157,653.56	167,112.75	417112.75
8	111,139.54	167,112.75	0.00	250,000

8.5 Problemas propuestos

1. Una empresa, debe liquidar una deuda de S/.250, 000 con pagos ordinarios semestrales en 5 años, al 14% de interés compuesto anual con capitalización semestral. Calcular el valor de la cuota semestral a pagar y formular el cuadro de amortizaciones.

2. Un comerciante tiene el compromiso de rembolsar un préstamo de S/.120, 000 con pagos anticipados semestrales en 5 años y seis meses, al 16% de interés compuesto anual con capitalización semestral. Calcular el valor de la cuota semestral a pagar y formular el cuadro de amortizaciones

3. El Banco Financiero del norte otorga un crédito a la empresa Servicios Marítimos S. A. para ejecutar un proyecto de ampliación de la planta por S/.200, 000 amortizable en 12 cuotas semestrales uniformes, aplicando una tasa efectiva semestral del 8%. Efectuándose los desembolsos de acuerdo al siguiente cronograma: al empezar las instalaciones S/.100, 000, cinco meses después S/.50, 000 y al final de los tres meses siguientes S/50,000, Calcular la cuota uniforme de amortización y formular el cuadro de amortizaciones.

4. Una máquina instalada en una fábrica pesquera, tiene un costo original de de S/.230, 000, una vida útil estimada de 10 años y un valor residual de S/.30, 000. Si la tasa nominal vigente es del 18% anual con capitalización mensual se pide calcular la cuota de depreciación anual y formular el cuadro de depreciaciones por el método:

   a. De la línea recta
   b. Del fondo de amortización
   c. De las anualidades o del interés sobre la inversión
   d. De las horas o unidades producidas
   e. De la suma de dígitos
   f. De la tasa fija sobre el saldo

g. De Kunztle

5. Constructora Chimbote, es propietaria de una superficie de arena en la que se estima una reserva de 5’000,000 de toneladas, con una inversión de S/.1’200,000.
De acuerdo al programa de producción, las reservas se agotarán en un período de 10 años, de acuerdo a los siguientes niveles de explotación: los tres primeros años 480,000 toneladas, los tres siguientes 520,000 toneladas y los cuatro últimos años 500,000 toneladas.

Los ingresos se estiman de S/.45.00 por tonelada los tres primeros años, de S/.55.00 por tonelada los tres siguientes años y de S/.65.00 lo cuatro últimos años; considerándose para el caso una tasa de interés anual del 10%.

En base a los datos precedentes determinar las cargas anuales por agotamiento y formular el cuadro correspondiente, usando los métodos:
a. Del factor o costo de agotamiento
b. Del fondo de amortización.

C A P Í T U L O IX

9. EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN

Para evaluar una inversión, es necesario estimar los ingresos y egresos que dicha actividad genera y se le denomina flujo de caja económico cuando no se considera la estructura de financiamiento y flujo de caja financiero cuando se le incluye.

El flujo de caja económico nos permite efectuar la evaluación económica, concibiendo al proyecto como una fuente generadora de beneficios y costos durante la vida útil del proyecto. Considera además que todas las ventas son al contado y el total de las inversiones constituyen el capital propio.

9.1 Evaluación Económica

Los criterios básicos o indicadores para la evaluación económica de un proyecto de inversión son los siguientes:

9.1.1 Valor Actual Neto.

Es un indicador que mide el valor económico del proyecto, actualizando los ingresos estimados futuros a una determinada tasa que constituye el costo de oportunidad del capital, deducido el valor actual de los egresos en los que se incluye los desembolsos por concepto de inversiones.

$$VAN = VAY - VAC$$

La ecuación indica que el valor actual neto es la diferencia entre el valor actual de los ingresos y el valor actual los costos.

Representa la cantidad de unidades monetarias que se gana o se pierde, según sea positivo, cero o negativo el resultado de la ecuación.

Parea calificarse como rentable y ser aceptado el proyecto, el valor actual neto debe ser mayor a cero: $VAN > 0$

Costo de oportunidad

El dinero tiene más de una oportunidad para invertirse, y cada vez que se acepta una de éstas, se pierde la ocasión de invertir en otra.

Costo de oportunidad es la alternativa de inversión que se rechaza para aceptar otra, y en consecuencia, se pierde el beneficio que hubiera podido obtenerse en la alternativa rechazada, para obtener el beneficio de la aceptada.
Para simplificar, supongamos que tenemos sólo dos alternativas para invertir nuestro dinero: una de ellas consiste en colocarlo en un banco a plazo fijo al 18% anual y la otra invertirlo en un negocio. Cuando la decisión es invertir en el negocio, se dejará de percibir el 18%, en consecuencia este es el costo de oportunidad de nuestro dinero.

$$\mathbf{VAN} \quad = \quad \sum BN_t \left[\frac{1}{(1+I)^t} \right] - \text{ I}$$

VAN = Valor Actual Neto
n = Períodos de evaluación, horizonte temporal del proyecto
BN = Beneficio neto
t = Período de tiempo especifico, (t = 2, cuando se refiere al período dos).
i = Tasa de actualización de ingresos y egresos.
I = Inversión

Para aplicación de la fórmula se consideran los flujos netos, consistentes en los beneficios netos, es decir los ingresos deducidos los costos. Los flujos pueden estimarse en cantidades y períodos uniformes o en cantidades y períodos variables, según las características del proyecto..

Ejemplo 9.1 En un proyecto cuya inversión total inicial es de S/435,440, se estiman los flujos netos proyectados de S/100,000 en el primer año, S/.200,000 en el segundo año y S/.300,000 en el tercer año, si se requiere un rendimiento mínimo del 18%, ¿se debe realizar la inversión?. Evaluar mediante el VAN

$$\text{VAN} \; = \; 100{,}000\left[\frac{1}{(1.18)}\right] + \; 200{,}000\left[\frac{1}{(1.18)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.18)^3}\right] - \; 435{,}440$$

VAN = 410,971.91 - 435,440.00

VAN = - 24,468.09

El VAN es negativo, en consecuencia el proyecto no es rentable y la recomendación técnica es que no se invierta.

9.1.2 Tasa Interna de Retorno

Se denomina tasa interna de retorno, a la tasa de actualización que iguala el valor actual de los beneficios netos con el valor inicial de las inversiones y por consiguiente, produce un valor actual neto de cero. Para aceptarse el proyecto como rentable, la TIR debe ser mayor que la tasa mínima requerida tomada como costo de oportunidad del capital.

De acuerdo a este indicador se establece:

- Si la TIT $>$ TCOK : Se acepta la ejecución del proyecto
- Si la TIR $<$ TCOK : Se rechaza el proyecto

$$\text{TIR} = \sum \text{BN} \frac{1}{(1+i)^t} - I = 0$$

TIR = Tasa interna de Retorno
TCOK = Tasa del costo de oportunidad del capital
n = Período de evaluación del proyecto
BN = Beneficio neto
t = Tiempo
i = Tasa de actualización
I = Inversión

Ejemplo 9.2 Con los datos del ejercicio anterior evaluar si conviene invertir o no, mediante la tasa interna de retorno TIR.

Dado a que la TIR es la tasa de actualización que hace que el VAN sea igual a cero y que lamentablemente se puede determinar mediante el tanteo, que lo llamamos también prueba y error, que consiste en probar con varias tasas diferentes, hasta obtener la respuesta.

Empezamos con cero.

$$\text{VAN} = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.0)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.0)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.0)^3}\right] - 435{,}440$$

VAN = 164,560

$$\text{VAN} = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.05)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.05)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.05)^3}\right] - 435{,}440$$

VAN = 100,355.26

$$\text{VAN} = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.10)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.10)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.10)^3}\right] - 435{,}440$$

VAN = 46,052.79

$$\text{VAN} = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.15)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.15)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.15)^3}\right] - 435{,}440$$

VAN = 0.00

$$\text{VAN} = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.20)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.20)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.20)^3}\right] - 435{,}440$$

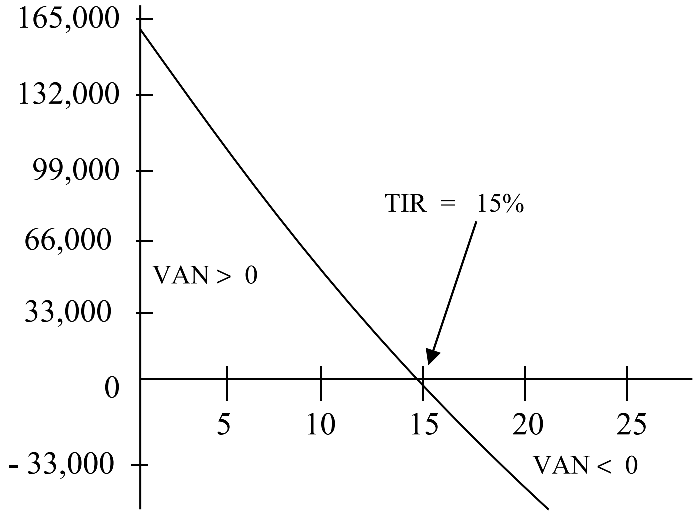
VAN = - 39,606.67

El VAN es cero al 15%, por lo que el 15% es la TIR. Si se requiere una tasa mínima de rendimiento del 18% y la TIR es menor no se debe invertir, por considerarse no rentable

Tasas	VAN
0 %	164,560.00
5	100,355.26
10	46,052..79
15	0.00

20	- 39,606.67

Fig. 9.1



9.1.3 Relación Beneficio Costo

Es el cociente entre el valor actualizado de los beneficios netos a la tasa tomada como costo de oportunidad y el monto de la inversiones iniciales; y para aceptarse como rentable el proyecto dicho cociente debe ser mayor a la unidad (B/C > 1)

$$B/C = \frac{\sum BN_t \left[\frac{1}{(1+i)^t}\right]}{I}$$

Ejemplo 9.3 Continuando con los datos del ejercicio 9.1 evaluar si conviene invertir utilizando el criterio de la relación beneficio costo B/C.

$$VAN = 100{,}000\left[\frac{1}{(1.18)}\right] + 200{,}000\left[\frac{1}{(1.18)^2}\right] + 300{,}000\left[\frac{1}{(1.18)^3}\right]$$

$$VAN = 410{,}971.91$$

$$B/C = \frac{410{,}971.91}{435{,}440B}$$

$$B/C = 0.94$$

El indicador es menor que la unidad, lo que nos permite rechazar el proyecto por considerarse no rentable.

9.1.4 Periodo de Recuperación de Capital

Los inversores desean que el desembolso realizado en cualquier proyecto sea recuperado en el menor tiempo posible. El período de recuperación se determina contando el número de años que han de transcurrir, para que la acumulación de los flujos de efectivo previstos, iguale a la inversión inicial.

Ejemplo 9.4. Se tienen dos alternativas de inversión, A y B, bajo el criterio del período de recuperación, evaluar la mejor alternativa.

Proyectos	I	BN1	BN2	BN3	Periodo
A	(2.000)	2.000	0	0	1 año
B	(2 000)	1.000	1.000	5.000	2 años

El proyecto A supone una inversión de 2.000, seguido de un sólo ingreso de 2.000 en el año 1

El proyecto B requiere también de una inversión de 2.000 y proporciona un flujo de 1.000 en los años 1 y 2 y de 5.000 en el año 3.

De este modo el criterio del período de recuperación nos dice que rechacemos el proyecto B y aceptemos el proyecto A.

Este criterio solo contempla el período en el que se recupera la inversión y deja de lado los beneficios posteriores.

Este criterio no considera no considera el valor del dinero a través del tiempo, no considera los posibles flujos de fondos posteriores al período de recuperación; esto hace que no pueda ser considerado como un indicador de la rentabilidad, su uso es solamente como un complemento de las anteriores.

A fin de entender con mayor claridad, desarrollamos un ejemplo utilizando los criterio de evaluación estudiados, como son el VAN. La TIR y la relación B/C.

Ejemplo 9.5 Una empresa desea determinar la mejor alternativa de inversión, entre los proyectos "A" y "B", hágalo Ud. mediante los indicadores: el VAN, la TIR. y la relación beneficio – costo (B/C), considerando que se requiere una tasa mínima de rendimiento del 22% anual.

BENEFICIOS NETOS PROYECTADOS

Años	Proyecto "A"	Proyecto "B"
0	(1'000,000)	(1'800,000)
1	500,000	800,000
2	500,000	700,000
3	520,000	950,000
4	480,000	900,000
5	450,000	850,000
6	400,000	820,000

Proyecto A

a. Cálculo del Valor Actual Neto (VAN)

Para calcular el VAN, efectuamos las siguientes operaciones:

- Ordenamos la inversión con signo negativo en el período cero, si solo se hace una inversión y los beneficios netos generados en cada año
- Calculamos el factor de actualización para cada período con: $\frac{1}{(1+i)^{t}}$

  ejemplo, para el año 1 $\frac{1}{(1+0.22)}$, para el año 2 $\frac{1}{(1+0.22)^{2}}$ para el año 3 $\frac{1}{(1+0.22)^{3}}$, y así sucesivamente.

- Se multiplican los beneficios netos con su correspondiente factor y se suman algebraicamente los productos, el resultado constituye el VAN.

Años	BN	Factor al 22%	VA
0	(1’000,000)	1.00000000	(1 000 000)
1	500,000	0.81967213	409 836.06
2	500,000	0.67186240	335 931.20
3	520,000	0.55070689	286 367.58
4	480,000	0.45139909	216 671.56
5	450,000	0.36999925	166 499.66
6	400,000	0.30327808	121 311.23
		VAN	536,617.30

El VAN es significativamente positivo lo cual indica que el proyecto es altamente rentable

b. Cálculo de la Tasa Interna de Retorno

La tasa interna de retorno se determina por tanteo, procediendo de la misma manera que para el cálculo del VAN.

Lo que se busca, es una tasa que al actualizar los beneficios netos y sumarlo algebraicamente con las inversiones nos dé cero. Para esto vamos aumentando la tasa de cálculo del factor hasta obtener un valor actual negativo.

Luego se procede a la interpolación entre los dos últimos resultados y más próximos de la siguiente manera:

- Como el VAN es la diferencia entre los beneficios actualizados y la inversión. Al VAN positivo lo vamos a llamar diferencia uno (d_1) y al VAN negativo diferencia dos ($-d_2$).

- Formamos la ecuación TIR = i + x $\left(\dfrac{d_1}{d_1 - -d_2}\right)$

i = Tasa que nos dio un VAN positivo, (en este caso 40%)
x = Diferencia entre la tasa del VAN positivo y la tasa del VAN negativo (diferencia entre 40% y 45%).

Años	BN	Factor 40%	VA	Factor 45%	VA
0	(1 000 000)	1.00000000	(1 000 000)	1.00000000	(1 000 000)
1	500 000	0.71428571	357 142.86	0.68965517	344 827.59
2	500,000	0.51020408	255 102.04	0.47562426	237 812.13
3	520 000	0.36443149	189 504.37	0.32801673	170 568.70
4	480 000	0.26030820	124 947.94	0.22621843	108 584.70
5	450 000	0.18593443	83 670 .49	0.15601271	70 205.72
6	400 000	0.13281031	53 124.12	0.10759497	43 037.99
			63 491.83		(24 963.03)

$$\text{TIR} = 40 + 5\left(\frac{63{,}491.83}{63{,}491.83 + 24{,}963.03}\right)$$

$$\text{TIR} = 43.59$$

La tasa interna de retorno de 43.59 es mayor que la tasa del costo de oportunidad, 22% en consecuencia, el proyecto es rentable.

c. Relación beneficio costo

La relación beneficio – costo se obtiene, dividiendo e l VAN a la tasa del costo de oportunidad por el monto de las inversiones, y si el resultado es mayor a uno el proyecto se debe aceptar por considerarse rentable.

BENEFICIOS NETOS ACTUALIZADOS

Años	BN	Factor al 22%	VA
0	(1’000,000)	1.00000000	(1 000 000)
1	500,000	0.81967213	409 836.06
2	500,000	0.67186240	335 931.20
3	520,000	0.55070689	286 367.58
4	480,000	0.45139909	216 671.56
5	450,000	0.36999925	166 499.66
6	400,000	0.30327808	121 311.23
		VA	1’536,617.30

$$B/C = \frac{1'536,617.30}{1'000,000.00}$$

B/C = 1.54

B/C > 1

Proyecto B

a. Valor Actual Neto

Años	BN	Factor al 22%	VA
0	(1'800,000)	1.00000000	(1 800 000)
1	800,000	0.81967213	655 737.70
2	700,000	0.67186240	470 303.68
3	950,000	0.55070689	523 171.54
4	900,000	0.45139909	406 259.18
5	850,000	0.36999925	314 499.36
6	820,000	0.30327808	248 688.02
		VAN	818,659.50

b. Tasa Interna de Retorno

Años	BN	Factor 38%	VA	Factor 40%	VA
0	(1 800 000)	1.00000000	(1 800 000)	1.00000000	(1 800 000)
1	800,000	0.72463768	579,710.40	0.71428571	571,4287.57
2	700,000	0.52509977	367 569.84	0.51020408	357 142.86
3	950,000	0.38050708	361 481.73	0.36443149	346 209.91
4	900,000	0.27572977	248 156.79	0.26030820	234 277.38
5	850,000	0.19980418	169 833 55	0.18593443	158 044.27
6	820,000	0.14478564	118 724.22	0.13281031	108 904.45
			45,476.27		(23 992.55)

$$TIR = 38 + 2\left(\frac{45,476.27}{45,476.27 + 23,992.55}\right)$$

TIR = 39.31

c. Relación beneficio costo

Años	BN	Factor al 22%	VA
0	(1'800,000)	1.00000000	(1 800 000)
1	800,000	0.81967213	655 737.70
2	700,000	0.67186240	470 303.68

3	950,000	0.55070689	523 171.54
4	900,000	0.45139909	406 259.18
5	850,000	0.36999925	314 499.36
6	820,000	0.30327808	248 688.02
		VA	2'618,659.50

$$B/C = \frac{2'618,659.50}{1'800,000.00}$$

$$B/C = 1.45$$

Resumen comparativo

PROYECTO	VAN	TIR	B/C
A	536,617.30	43.59	1.54
B	818.659.50	39.31	1.45

Los dos proyectos son rentables, pero la mejor alternativa de inversión es el proyecto "B", debido a que presenta un VAN mayor y este constituye un indicador más confiable con respecto a los demás.

9.2 Evaluación Financiera

Para la evaluación financiera es necesario previamente la formulación del flujo de caja financiero, el cual incorpora los intereses como costo del capital prestado, las cuotas de amortización al préstamo, separa el capital propio del capital externo. La evaluación financiera evalúa la rentabilidad del capital propio y la capacidad financiera del proyecto para el pago de la deuda.

Los criterios o indicadores para la evaluación financiera son los mismos de la evaluación económica, y se determinan utilizando los flujos netos de efectivo obtenidos en flujo de caja financiero.

Ejemplo 9.6 Con la información del ejemplo 9.5, referente al proyecto A y considerando que la estructura financiera de las inversiones es del 30% capital propio y el 70% financiamiento externo, con una tasa de interés anual del 25%, determinar la factibilidad del proyecto, mediante los indicadores: el VANF, la TIRF. y la relación beneficio – costo financiero (B/CF), considerando que se requiere una tasa mínima de rendimiento o costo de oportunidad del capital del 22% anual.

Cuota anual de devolución del préstamo:

$$R = 700,000\left[\frac{0.25(1.25)^6}{(1.25)^6 - 1}\right]$$

$$R = 237,173.65$$

Años	BN	Egresos por Préstamo	BNF
0	(1’000,000)	700,000.00	300,000.00
1	500,000	237,173.65	262,826.35
2	500,000	237,173.65	262,826.35
3	520,000	237,173.65	282,826.35
4	480,000	237,173.65	242,826.35
5	450,000	237,173.65	212,826.35
6	400,000	237,173.65	162,826.35

a. Cálculo del Valor Actual Neto Financiero

Años	BNF	Factor al 22%	VA
0	(300,000.00)	1.00000000	(300 000.00)
1	262,826.35	0.81967213	215,431.43
2	262,826.35	0.67186240	176,583.14
3	282,826.35	0.55070689	155,754.42
4	242,826.35	0.45139909	109,611.59
5	212,826.35	0.36999925	78,745.59
6	162,826.35	0.30327808	49,381.66
		VANF	485,907.83

El VANF es significativamente positivo comparativamente con el capital propio lo cual indica que el proyecto es rentable para los inversionistas.

b. Cálculo de la Tasa Interna de Retorno Financiero

Años	BNF	Factor 80%	VA	Factor 90%	VA
0	(300,000.00)	1.00000000	(300 000.00)	1.00000000	(300 000.00)
1	262,826.35	0.555555555	146,014.64	0526315789	138,329.66
2	262,826.35	0.308641975	81,119.24	0.27700831	72,805.08
3	282,826.35	0.171467764	48,495.60	0.145793847	41,234.34
4	242,826.35	0.095259868	23,131.61	0.076733603	18,632.94
5	212,826.35	0.052922149	11,262.23	0.040386107	8,595.23
6	162,826.35	0.029401194	4,787.29	0.021255845	3,461.01
			14,810.61		(16,941.74)

$$TIRF = 80 + 10\left(\frac{14{,}810.61}{14{,}810.61 + 16{,}941.74}\right)$$

$$TIR\ F = 84.66$$

La tasa interna de retorno es significativamente más alto que la tasa del costo de oportunidad del capital 22%, por lo cual concluimos que el proyecto es rentable.

c. Cálculo de la Relación Beneficio Costo Financiero

Años	BNF	Factor al 22%	VA
0	300,000.00		
1	262,826.35	0.81967213	215,431.43
2	262,826.35	0.67186240	176,583.14
3	282,826.35	0.55070689	155,754.42
4	242,826.35	0.45139909	109,611.59
5	212,826.35	0.36999925	78,745.59
6	162,826.35	0.30327808	49,381.66
		VA	785,907.83

$$B/CF = \frac{785{,}907.83}{300{,}000.00}$$

$$B/CF = 2.62$$

El indicador es mayor que la unidad, de manera que se justifica la ejecución del proyecto por considerarlo rentable.

9.3 Problema propuesto

1. En un proyecto cuya inversión inicial es de S/148,000, financiado el 30% con capital propio y el 70% con capital externo, a una tasa de interés del 22% anual, con un rendimiento mínimo requerido del 25%.

Los flujos netos proyectados para efectos de evaluación se presentan en el siguiente cuadro:

Años	BNE	Pago Préstamo	BNF
0	(148,000)		(44,400)
1	45,500	36,177.73	9,322.27
2	45,500	36,177.73	9,322.27
3	55,500	36,177.73	19,322.27
4	55,500	36,177.73	19,322.27
5	55,500	36,177.73	19,322.27

Cuota anual de devolución del préstamo:

$$R = 103{,}600\left[\frac{0.22(1.22)^5}{(1.22)^5 - 1}\right]$$

$$R = 36{,}177.73$$

Con la información propuesta, realizar la evaluación económica y financiera con el uso de los indicadores desarrollados en el tema.

BIBLIOGRAFÍA

ALIAGA VALDEZ Carlos: *Manual de Matemática Financiera, texto, problemas y casos* 4ta edición 2,001, editado por la Universidad del Pacífico, Lima Perú

ALIAGA VALDEZ, Carlos: *Matemática Financiera un enfoque práctico*, editado en Colombia en el 2,002

PORTUS GOVINDEN, Lincoyán: *Matemáticas Fina*ncieras, cuarta edición 1998, editado en Colombia.

ALVARES ARANGO Alberto: *Matemáticas Financieras*, tercera edición 2,005 editado en Colombia.

HECTOR MONTOYA, Wiliams: *Matemáticas Financieras y actuariales por computadora*, editado el 2,005 por el Instituto de Investigación el Pacífico Lima Perú

COLLAZOS CERRON, Jesús: *Inversión y Financiamiento de proyectos*, editado por editorial San Marcos, Lima Perú

ALEGRE ELERA, Jenner: *El Cálculo Financiero*, editado en el Perú por ediciones graficas América

ALLEN MURUGARRA, Anibal: *Matemática Financiera*, Editorial San Marcos, Lima Perú.

QUISPE QUIROZ, Ubaldo: *Matemática Financiera*, Cuarta edición 2,002. Editorial San Marcos, Lima Perú

ESPINOZA, Abdias: *Matemática Financiera Simplificada*, Universidad de Ingeniería Lima Perú.